



แนวคิตทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3
ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

จัดทำโดย
มิสพิชชาพร ศรประสิทธิ์
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 โรงเรียนเซนต์คาเบรียล

ชื่องานวิจัย : แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3
 ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

คณะผู้วิจัย : มิสพิชชาพร ศรประสิทธิ์

ผู้วิจัย

ปีการศึกษา : 2567

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์แนวคิดเรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้
 วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด กลุ่มเป้าหมายคือ นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3
 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียล ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ
 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง การหาร จำนวน 4 แผน
 เครื่องบันทึกวีดิทัศน์ และเครื่องบันทึกภาพนิ่ง วิเคราะห์ข้อมูลจากผลงานของนักเรียนและโพรโทคอลของ
 ชั้นเรียน โดยวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ตามกรอบแนวคิดของ Isoda &
 Katagiri (2012) และนำเสนอข้อมูลแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์

ผลการวิจัยพบว่า พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร 9 ประเภท
 ประกอบด้วย 1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต นักเรียนจัดกลุ่มของจำนวนทั้งหมดเป็นกลุ่มย่อยเพื่อคำนวณการหาร
 2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย นักเรียนแสดงหน่วยสิ่งของจำนวนต่อกลุ่มที่แบ่ง 3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง
 นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์การหารแสดงแทนวิธีการหาคำตอบ 4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ
 นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหการหารจากความหมายของการหารและระบุวิธีการในการหาคำตอบ เช่น
 แบ่งกลุ่มย่อยให้สมาชิกในกลุ่มเท่ากัน 5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ นักเรียนอธิบายวิธีการแก้ปัญห
 เป็นขั้นตอน 6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ นักเรียนคาดการณ์คำตอบของปัญหาไว้ล่วงหน้า 7) แนวคิด
 เกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน นักเรียนแสดงสมบัติการหารด้วย 1 8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ
 นักเรียนใช้การแบ่งเท่า ๆ กัน การบวก และการคูณในการแก้ปัญหการหาร และ 9) แนวคิดเกี่ยวกับการ
 แสดงความคิด นักเรียนใช้การพูดและเขียนเพื่ออธิบายแนวคิดในการแก้ปัญหด้วยความเข้าใจของตนเอง

คำสำคัญ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ การศึกษาชั้นเรียน วิธีการแบบเปิด

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อ	ก
สารบัญ	๗
บทที่ 1 บทนำ	1
1. ความเป็นมาและความสำคัญ	1
2. คำถามการวิจัย	3
3. วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
4. ขอบเขตการวิจัย	4
5. นิยามคำศัพท์เฉพาะ	4
6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	7
บทที่ 2 วรรณกรรมและงานวิจัยเกี่ยวข้อง	8
1. แนวคิดเกี่ยวกับการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study)	9
2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด (Open Approach)	13
3. แนวคิดเกี่ยวกับการบูรณาการการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด	18
4. แนวคิดเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์	20
5. แนวคิดเกี่ยวกับการหาร	30
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	35
7. กรอบแนวคิดการวิจัย	38
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย	39
1. ผู้มีส่วนร่วมในการทำวิจัย	40
2. เครื่องมือในการวิจัย	42
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล	43
4. การวิเคราะห์ข้อมูล	44
5. การนำเสนอผลการวิจัย	45

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
บทที่ 4 ผลการวิจัย	48
1. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นภาพถ่ายผลงานของนักเรียน	49
2. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นโปรโตคอล	65
3. สรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ทั้ง 9 แนวคิด โดยนำเสนอในรูปแบบตาราง	86
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	90
1. สรุปผลการวิจัย	91
2. อภิปรายผลการวิจัย	92
3. ข้อเสนอแนะ	94
บรรณานุกรม	96
ภาคผนวก	98

สารตาราง

เรื่อง	หน้า
ตารางที่ 1 แสดงตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง มาตรฐาน ค 1.1	31
ตารางที่ 2 แสดงตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง มาตรฐาน ค 1.2	32
ตารางที่ 3 แสดงสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การคูณ	47
ตารางที่ 4 แสดงผลสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร	86

สารบัญภาพ

เรื่อง	หน้า
ภาพที่ 1 แสดงขั้นตอนของการศึกษาชั้นเรียนถูกนำมาปรับใช้ในบริบท ของประเทศไทย	12
ภาพที่ 2 แสดงการบูรณาการองค์ประกอบสาระการเรียนรู้โดยใช้สถานการณ์ ปัญหา (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)	13
ภาพที่ 3 แสดงขั้นขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด (Open Approach) 4 ขั้นตอน ตามแนวคิดของ Inprasitha (2011)	17
ภาพที่ 4 แสดงการบูรณาการการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ตามแนวคิดของ Inprasitha (2011)	19
ภาพที่ 5 แสดงรูปแบบเส้นจำนวนใช้สำหรับแสดงตัวเลข	24
ภาพที่ 6 แสดงรูปของแถวหรือพื้นที่	25
ภาพที่ 7 แสดงการหารแบบหาจำนวนสิ่งของสำหรับหนึ่งกลุ่ม จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2	33
ภาพที่ 8 แสดงการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2	33
ภาพที่ 9 แสดงการหาผลหารจากตารางสูตรคูณ จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2	34
ภาพที่ 10 แสดงสถานการณ์การหารที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเดียวกัน ตัวตั้งหารเป็น 0 และตัวหารเป็น 1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2	35

สารบัญภาพ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
ภาพที่ 11 แสดงกรอบแนวคิดการวิจัย	38
ภาพที่ 12 แสดงผลงานของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	49
ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต	
ภาพที่ 13 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย	50
ภาพที่ 14 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ	51
การแสดงแทน	
ภาพที่ 15 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ	52
ขั้นตอนวิธีการ	
ภาพที่ 16 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ	52
การแสดงความคิด	
ภาพที่ 17 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต	53
ภาพที่ 18 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการ	54
แสดงแทน	
ภาพที่ 19 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้น	54
ตอนวิธีการ	
ภาพที่ 20 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติ	55
พื้นฐาน	
ภาพที่ 21 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการ	56
แสดงความคิด	
ภาพที่ 22 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ	56
การดำเนินการ	

สารบัญภาพ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
ภาพที่ 23 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ ขั้นตอนวิธีการ	57
ภาพที่ 24 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ การคิดเชิงการกระทำ	58
ภาพที่ 25 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ การแสดงความคิด	59
ภาพที่ 26 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต	60
ภาพที่ 27 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย	61
ภาพที่ 28 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการ ดำเนินการ	61
ภาพที่ 29 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้น ตอนวิธีการ	62
ภาพที่ 30 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ สมบัติพื้นฐาน	63
ภาพที่ 31 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ การคิดเชิงการกระทำ	63
ภาพที่ 32 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับ การแสดงความคิด	64

บทที่ 1

บทนำ

1.ความเป็นมาและความสำคัญ

จากวิกฤตการณ์การระบาดของ COVID-19 ภาคการศึกษาเกิดการเปลี่ยนแปลงหลายด้าน ผลกระทบจาก COVID-19 ทำให้ห้องเรียนส่วนใหญ่ต้องถูกปิด นำไปสู่รูปแบบการเรียนรู้ในรูปแบบเรียนออนไลน์ เรียนออนไลน์ และเรียนทางไกลมากยิ่งขึ้น ส่งผลต่อการศึกษาไทยมีการปรับเปลี่ยนเพื่อจัดการต่อวิกฤตการณ์ที่เกิดขึ้น ในช่วงการระบาดของ COVID-19 ในการดำเนินงานในปีการศึกษา 2565 (พ.ศ.2565-2566) สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานยังคงใช้หลักการและรูปแบบเดิม ที่ใช้มาตลอดระยะเวลา ทั้งการจัดการเรียนการสอน กิจกรรม และการวัดผลประเมินผล ในขณะที่นักเรียนมีการเรียนรู้ที่ลดลง (Learning Loss) จากสถานการณ์ COVID-19 นักเรียนจำเป็นต้องอยู่ภายในเคหสถาน หรือขาดการพบพบเพื่อนเป็นเวลานาน ความรู้ไม่อาจจะคงเดิม

การสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นวิชาหลักที่เกิดขึ้นทั่วทั้งภาคการศึกษา โดยขัดแย้งในภาคการศึกษาคณิตศาสตร์หรือมีส่วนสนับสนุนต่อสาขาวิชาอื่น ๆ ทั้งด้านวิชาการและสายอาชีพ ดังนั้นผลกระทบของการแพร่ระบาดต่อการศึกษาคณิตศาสตร์จึงมีแนวโน้มที่จะแพร่หลายและซับซ้อน The Office of Qualifications and Examinations Regulation (Ofqual) หน่วยงานที่กำหนดคุณสมบัติการสอบ และการประเมินในอังกฤษ รายงานว่าการสูญเสียการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์แพร่หลายมากกว่าในสาขาวิชาหลักอื่น ๆ เช่น การอ่านออกเขียนได้ The National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) ชี้ให้เห็นว่า “การเรียนรู้ที่จะแก้ปัญหาคือเหตุผลหลักสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์” (NCSM 1977, 1). ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของขบวนการ problem-solving ในวิชาคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนในสหรัฐอเมริกา สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ (NCTM) ในมาตรฐานวิชาชีพอการสอนคณิตศาสตร์ระบุว่า "การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการสื่อสารเป็นกระบวนการที่ควรแพร่หลายในการสอนคณิตศาสตร์ทั้งหมด และควรเป็นแบบอย่าง" (NCTM 1991, 95). ในปี 1980 ในวาระการดำเนินการ NCTM ระบุว่า "Problem solving ต้องเป็นจุดสำคัญของหลักสูตร"

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ ๒๑ เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถ

วิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐาน ในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียม กับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัย และสอดคล้อง กับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้า อย่างรวดเร็วในยุค โลกาภิวัตน์

การเรียนรู้ที่เน้นกันอยู่ในประเทศไทยยังเป็นเรื่องของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แต่ไม่ได้เน้น กระบวนการเรียนรู้หรือวิธีการเรียนรู้ของนักเรียน ครูยังเข้าใจผิดว่าการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็น ศูนย์กลางเป็นการเปลี่ยนการทำกิจกรรมของครูให้เป็นกิจกรรมของนักเรียน โดยครูพยายามผลักดันกิจกรรม การสอนไปให้นักเรียนทำ ซึ่งกิจกรรมการสอนเช่นนี้ไม่ช่วยพัฒนาผู้เรียนตามความสามารถของนักเรียน ซึ่งเป็นปัญหาใหญ่ที่ครุคณิตศาสตร์กำลังเผชิญอยู่ครูยังเข้าใจผิดว่าการขาดระเบียบวินัยและการไม่ตั้งใจ เรียนของนักเรียนเป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจ ทั้งที่ความเป็นจริงแล้วปัญหาน่าจะมาจากการที่ครู ไม่เข้าใจนักเรียนจริง (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

นวัตกรรมที่จะช่วยให้นักเรียนเรียนรู้แบบบูรณาการ ทั้งเนื้อหา สาระ ทักษะ/กระบวนการและ คุณลักษณะที่พึงประสงค์ คือนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียน(Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด(Open Approach) ซึ่งการศึกษาชั้นเรียน เป็นนวัตกรรมหนึ่งที่มีระบบการพัฒนาวิชาชีพครูและใช้ในประเทศ ญี่ปุ่น ในปัจจุบันนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนได้รับการพัฒนาและปรับใช้ในหลายประเทศทั่วโลก ซึ่งถูก ยอมรับว่าเป็นวิธีการที่มีประสิทธิ ภาพในการพัฒนานักเรียนและพัฒนาวิชาชีพครู การศึกษาชั้นเรียนมี 3 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นการวางแผนร่วมกันของบทเรียน 2) ขั้นการร่วมกันสังเกตชั้นเรียน และ 3) ขั้นการ สะท้อนผลชั้นเรียนร่วมกัน ส่วนการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ เรียนรู้ด้วยตนเอง มีอิสระในการคิด มีความกล้าแสดงออก มีคำตอบที่หลากหลายจากปัญหาปลายเปิดที่ ครูสร้างขึ้นจากสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีสื่อการเรียนรู้เป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนมีความ สนใจในบทเรียน ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิดมี 4 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด 2) ขั้นนักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง 3) ขั้นอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน และ 4) ขั้นสรุปเพื่อเชื่อมโยงแนวคิด ซึ่ง

ครูผู้สอนจะต้องมีการคาดการณ์ แนวคิดของนักเรียนล่วงหน้าว่าแนวคิดของนักเรียนจะออกมาในทิศทางใด(Inprasittha, 2010)

จากที่ได้กล่าวมาในข้างต้น ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์หรือรายวิชาอื่นในระบบการศึกษาไทย ยังเน้นเรื่องของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรูปแบบเดิม แต่ไม่ได้เน้นกระบวนการเรียนรู้หรือวิธีการเรียนรู้ของนักเรียน ขณะที่นักเรียนได้รับผลกระทบของการระบาด COVID-19 จึงขาดโอกาสและขาดหายในการเรียนรู้ผ่านชั้นเรียนโดยตรง ส่งผลให้นักเรียนมีการเรียนรู้ที่ลดลง (Learning loss) ซึ่งการใช้ผลสัมฤทธิ์กับนักเรียนที่ได้รับการศึกษาที่ห่างจากชั้นเรียน เป็นการปิดโอกาสที่จะให้นักเรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาด้วยตนเองตามพัฒนาการที่เหมาะสมต่อเวลาและวัยการเรียนรู้ของนักเรียน ส่งผลให้นักเรียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้จำกัด ขาดจินตนาการของนักเรียน และไม่หลากหลายเท่าที่ควร ผู้วิจัยได้เห็นถึงความสำคัญของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการจัดการเรียนการสอน โดยการที่จะเห็นความหลากหลายของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะต้องเป็นชั้นเรียนที่จัดการเรียนรู้แบบบูรณาการ ทั้งเนื้อหาสาระ ทักษะ กระบวนการ และคุณลักษณะที่พึงประสงค์เข้าด้วยกัน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้สนใจที่จะศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยผู้วิจัยได้ร่วมเรียนรู้และใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดเพื่ออธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร

2. คำถามการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีคำถามการวิจัย คือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องการหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดเป็นอย่างไร

3. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

4. ขอบเขตการวิจัย

4.1 กลุ่มเป้าหมาย

นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียลภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน

4.2 ขอบเขตด้านเนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ เนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การหาร จากหนังสือเรียน คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

5. นิยามคำศัพท์เฉพาะ

5.1 การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) หมายถึง แนวทางหรือวิธีการในการพัฒนาวิชาชีพครูที่ใช้โรงเรียนเป็นฐานของการพัฒนา เน้นการทำงานร่วมกันอย่างต่อเนื่องของครูผู้สอน ครูผู้สังเกต ผู้บริหาร และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องของโรงเรียน โดยมีขั้นตอนการปฏิบัติร่วมกัน 3 ขั้นตอน ดังนี้

1) การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน (Plan) เป็นการร่วมมือกันของทีมศึกษาชั้นเรียนในการสร้างสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด จากนั้นทำสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้อยู่ในรูปของกิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามแบบของวิธีการแบบเปิด(Open Approach)

2) การสังเกตการสอนร่วมกัน (Do) ในขั้นตอนนี้จะมีครูหนึ่งคนนำแผนการสอนไปใช้ในชั้นเรียน โดยดำเนินการสอนตามวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ส่วนครูคนอื่นทำหน้าที่สังเกตชั้นเรียน

3) การสะท้อนผลบทเรียนหลังการสอนร่วมกัน (See) ทีมการศึกษาชั้นเรียนจะสะท้อนผลร่วมกัน โดยจะสะท้อนเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสังเกตการสอน เพื่อนำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาการจัดการเรียนรู้ต่อไป

5.2 วิธีการแบบเปิด (Open Approach) หมายถึง คือ การเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้แก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยลักษณะของปัญหาเป็นปัญหาปลายเปิด ซึ่งมีลำดับขั้นตอนการสอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

1) ขั้นการนำเสนอปัญหาปลายเปิด เป็นการนำเสนอปัญหาปลายเปิดให้กับนักเรียน โดยจุดเน้นของการนำเสนอปัญหาปลายเปิด คือ การทำให้ปัญหานั้นเป็นปัญหาของนักเรียนให้ได้

2) ชั้นนักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง เป็นการให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยตัวเองในขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหา โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการเรียนรู้ด้วยตัวเองเพียงคนเดียวมาเป็นการเรียนรู้ร่วมกับผู้อื่น ส่วนครูทำหน้าที่สังเกตแนวคิดของนักเรียน

3) ชั้นอภิปรายเพื่อหาเหตุผลและเปรียบเทียบแนวคิดของนักเรียน เป็นการนำแนวคิดที่หลากหลายของนักเรียนมาอภิปรายทั้งชั้นเรียนเพื่อให้นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนได้มีโอกาสเรียนรู้จากแนวคิดของเพื่อน

4) ชั้นสรุปผ่านการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นทั้งชั้นเรียน เป็นการขยายแนวคิดโดยการเชื่อมโยงจากแนวคิดต่าง ๆ ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน จนมาสู่ข้อสรุปที่เป็นแนวคิดของทั้งชั้นเรียนที่นักเรียนทุกคนยอมรับ

5.3 แนวคิดทางคณิตศาสตร์หมายถึง วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีต่อสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะแสดงออกมาในรูปของยุทธวิธี วิธีคิด หรือวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผ่านการพูด การเขียน หรือการแสดงอิริยาบถต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน โดยจำแนกแนวคิดตามกรอบของ Isoda & Katagiri (2012) ได้ทั้งหมด 9 แนวคิด ดังนี้

1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) เป็นการชี้แจงเซตของสิ่งต่าง ๆ โดยการพิจารณาสมาชิกที่แยกออกจากเซต และเงื่อนไขสำหรับการรวมสมาชิกเข้าด้วยกันของเซต ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จะใช้คำว่า “กลุ่ม” แทนความหมายของคำว่า “เซต” โดยนักเรียนสามารถจัดกลุ่มโดยสร้างเงื่อนไขของกลุ่มได้ เช่น การหารลงตัว ที่มีทั้งการหารแบบหาจำนวนสมาชิกในกลุ่มและการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม

2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (idea of units) เป็นการมุ่งเน้นไปที่องค์ประกอบ ขนาดขององค์ประกอบ และความสัมพันธ์ขององค์ประกอบ ซึ่งเป็นการแยกเป็นหน่วยย่อยแล้วพิจารณาขนาดและความสัมพันธ์นั้น เช่น การแบ่งจำนวนเท่า ๆ กันหรือใช้การบวกเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน เพื่อตรวจสอบผลลัพธ์

3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (idea of representation) เป็นการพยายามที่จะคิดตามหลักการพื้นฐานของการแสดงแทน โดยจะแสดงออกในรูปแบบของการเขียน วาดภาพ การใช้สื่อ หรือสิ่งอื่น ๆ ที่เป็นรูปธรรม ที่สามารถเป็นสัญลักษณ์เพื่อแสดงออกมาซึ่งแนวคิด

4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (idea of operations) เป็นการชี้แจงและขยายความหมายของการกระทำและการดำเนินการ และการพยายามที่จะคิดบนพื้นฐานของการกระทำและการดำเนินการในเรื่องของการหาร เมื่อนักเรียนพบโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหานักเรียนจะต้องสามารถตัดสินใจเกี่ยวกับการดำเนินการจากความหมายของการคำนวณพร้อมทั้งระบุวิธีการและคุณสมบัติของการคำนวณ โดยนักเรียนต้องมีความเข้าใจความหมายของการคำนวณ เช่น แบ่งกลุ่มย่อยให้สมาชิกในกลุ่มเท่ากัน ต่อมาใช้การคูณเข้ามาช่วย แล้วได้ผลลัพธ์ของการหาร

5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (idea of algorithms) เป็นการพยายามที่จะทำให้วิธีการดำเนินการเป็นทางการหรือเป็นระเบียบแบบแผน ซึ่งเป็นการคิดอยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจ โดยไม่ต้องคิดเกี่ยวกับความหมายของแต่ละขั้นตอน เช่น วิธีการแบ่งจากจำนวนทั้งหมดเรื่อย ๆ ตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา จากนั้นเชื่อมวิธีการแบ่งจำนวนเท่า ๆ กันกับการคูณ จนสามารถสรุปและได้ผลลัพธ์

6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ (idea of approximation) เป็นการพยายามที่จะเข้าใจภาพรวมและการดำเนินการของสิ่งต่าง ๆ โดยใช้ผลของความเข้าใจนี้ประมาณผลลัพธ์

7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (idea of fundamental properties) เป็นการมุ่งเน้นไปที่กฎพื้นฐานและสมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ กฎพื้นฐาน เช่น นักเรียนใช้สมบัติเอกลักษณ์การคูณมาใช้ในการหาผลลัพธ์ของสถานการณ์ปัญหาการหารด้วย 1 และแสดงสมบัติการหารด้วย 1 ที่จะได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้ง

8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking) เป็นการพยายามที่จะมุ่งเน้นไปที่สิ่งที่ถูกกำหนดไว้ด้วยการตัดสินใจเพื่อค้นหาข้อสรุปหรือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร เมื่อโจทย์หรือสถานการณ์ปัญหายากที่จะแก้ปัญหาดังตรง แต่สามารถแก้ปัญหาดังการพิจารณาในสิ่งที่เกี่ยวข้องกันหรือสัมพันธ์กัน เช่น ใช้การแบ่งเท่า ๆ กัน การบวก และการคูณ จากนั้นหาเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของทั้งสามกระบวนการในการดำเนินการแก้ปัญหาดังการตามเงื่อนไข

9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) เป็นการพยายามที่จะนำเสนอโจทย์และความสัมพันธ์ที่เป็นการแสดงความคิด และอ่านความหมายของโจทย์และความสัมพันธ์นั้น โดยนักเรียนพยายามจะนำเสนอความเข้าใจของตนเอง

5.4 การหาร หมายถึง การคูณตามเนื้อหาในหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

6.1 ได้ทราบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้
นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

6.2 ได้เรียนรู้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร เพื่อนำไปวางแผนบทเรียนเขียน
แผนการจัดการเรียนรู้ และคาดการณ์แนวคิดของนักเรียน

บทที่ 2

วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพ (Qualitative Research) มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2565 ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยมีสาระสำคัญตามลำดับหัวข้อ ดังต่อไปนี้

1. แนวคิดเกี่ยวกับการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study)
2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด (Open Approach)
3. แนวคิดเกี่ยวกับการบูรณาการการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด
4. แนวคิดเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์
5. แนวคิดเกี่ยวกับการหาร
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
7. กรอบแนวคิดการวิจัย

ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. แนวคิดเกี่ยวกับการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study)

ไมตรี อินประสิทธิ์ (2546) กล่าวว่า การศึกษาชั้นเรียนมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาครูในประเทศญี่ปุ่นมาตั้งแต่ยุคเริ่มต้นของการศึกษามวลชนของญี่ปุ่น ซึ่งมากกว่าสองร้อยปีแล้ว เหตุผลที่การศึกษาชั้นเรียนได้รับความนิยมอาจเป็นเพราะการศึกษาชั้นเรียนทำให้ครูผู้สอนได้มีโอกาสดังต่อไปนี้

- 1) ได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดทางการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับแนวทางในการปฏิบัติการสอน
- 2) ได้ปรับเปลี่ยนมุมมองเกี่ยวกับการสอนและการเรียนรู้
- 3) ได้เรียนรู้ที่จะพิจารณาแนวปฏิบัติของครูผู้สอนจากมุมมองของนักเรียน
- 4) ได้รับการสนับสนุนช่วยเหลือจากเพื่อนครูด้วยกัน

นอกจากนี้ลักษณะต่อไปของการศึกษาชั้นเรียนทำให้การศึกษาชั้นเรียนแตกต่างจากการพัฒนาครูทั่วไป

1) การศึกษาชั้นเรียน เปิดโอกาสให้ครูได้มองเห็นการสอนและการเรียนรู้ในชั้นเรียนอย่างเป็นรูปธรรม ครูร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการวางแผนการสอน ครูนำแผนการสอนไปใช้ครูร่วมกันสังเกตการสอน และครูร่วมกันสะท้อนความคิดเกี่ยวกับแนวปฏิบัติในการสอน การที่ได้สังเกตการสอนจริงในชั้นเรียนทำให้ครูได้เข้าใจและเห็นภาพว่าการสอนนั้นเป็นอย่างไร ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจในสิ่งที่ตนกำลังเรียนได้ดียิ่งขึ้น

2) นักเรียนเป็นหัวใจสำคัญของการพัฒนาครูซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้ครูได้ศึกษาวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้และความเข้าใจของนักเรียนผ่านการสังเกตการสอนและการอภิปรายเกี่ยวกับแนวปฏิบัติในการสอน การศึกษาชั้นเรียนทำให้ครูได้มีบทบาทสำคัญในการก่อให้เกิดการปรับเปลี่ยนพฤติกรรมในการสอนและการพัฒนาหลักสูตร

Stigler & Hiebert (1999) ได้สรุปขั้นตอนของระบบการพัฒนาวิชาชีพครูแบบ Lesson Study ไว้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดปัญหา จะนำไปสู่การกำหนดกรอบหรือเป้าหมายในการทำงานร่วมกันครู อาจจะเป็นปัญหาทั่วไปหรือเป็นประเด็นที่เฉพาะเจาะจง โดยที่ครูพิจารณาจากสภาพปัญหาด้านการเรียนรู้ของผู้เรียนที่เกิดขึ้นจริงในชั้นเรียน ด้านนโยบายจากต้นสังกัด หรือนโยบายจากระดับชาติ

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นการวางแผนบทเรียน กลุ่มครูจะมีการประชุมร่วมกันวางแผนบทเรียน โดยมีเป้าหมายเพื่อให้ได้บทเรียนที่มีประสิทธิภาพและพัฒนาความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนแล้วนำเสนอต่อที่ประชุมในระดับโรงเรียน เพื่อรับการสะท้อนแลกเปลี่ยนแนวคิดร่วมกัน และเป็นข้อมูลสำหรับการพัฒนาแผนต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นนำแผนการสอนไปใช้จริงในห้องเรียน เป็นการนำแผนการสอนที่ครูได้วางแผนร่วมกันไปใช้สอนในชั้นเรียนจริง โดยครูผู้สอนจะต้องเป็นผู้มีส่วนร่วมในการวางแผนบทเรียนหรือวางแผนการจัดการเรียนการสอนในทุกขั้นตอน ในขณะที่สอนสมาชิกที่คนเหลือจะเป็นผู้สังเกตและบันทึกข้อมูลการสอน เพื่อเป็นข้อมูลในการนำมาสะท้อนผลบทเรียน

ขั้นตอนที่ 4 ขั้นประเมินผลบทเรียนและสะท้อนผลของบทเรียน ครูร่วมกันสะท้อนผลบทเรียนโดยเริ่มจากครูผู้สอนเน้นไปที่การจัดกิจกรรมว่ามีความสำเร็จมากน้อยเพียงใด และมีปัญหาหรืออุปสรรคอะไรบ้างที่ไม่สามารถบรรลุเป้าหมายได้ จากนั้นเป็นการสะท้อนผลของสมาชิก โดยการสะท้อนผลจะมุ่งเน้นไปที่ตัวบทเรียนที่วางแผนร่วมกัน เป็นการวิพากษ์วิจารณ์เพื่อนำไปปรับปรุงให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นปรับปรุงบทเรียน ข้อมูลจากการสังเกตและการสะท้อนผลบทเรียนในชั้นที่ผ่านมาจะถูกนำมาปรับปรุงบทเรียน เช่น การปรับสื่อการสอน การปรับกิจกรรมการเรียนการสอน การปรับปัญหาที่นำเสนอ การปรับคำถามที่ใช้ถาม เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 ขั้นสอนบทเรียนที่ได้รับการปรับปรุงแล้ว เมื่อปรับปรุงบทเรียนหรือแผนการสอนแล้ว บทเรียนหรือแผนการสอนจะถูกนำไปใช้สอนในห้องเรียนใหม่อีกครั้ง โดยอาจจะให้ครูคนเดิมเป็นผู้สอนหรือสามารถปรับเปลี่ยนจากสมาชิกในกลุ่มก็ได้ โดยครูทุกคนในโรงเรียนจะถูกเชิญเข้าร่วมสังเกตการสอน

ขั้นตอนที่ 7 ขั้นประเมินผลและสะท้อนผลโดยรวม เป็นการที่ครูในโรงเรียนทั้งหมดมาร่วมสะท้อนผลกัน ในขั้นนี้อาจจะมีผู้เชี่ยวชาญจากภายนอกมาร่วมสะท้อนผลด้วย การสะท้อนผลจะเน้นที่บทเรียนหรือแผนการจัดการเรียนรู้ที่มีผลต่อการทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และเข้าใจในบทเรียน และประเด็นปัญหาทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบบทเรียนหรือแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งในด้านทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 8 ขั้นแลกเปลี่ยนผลของการศึกษา มีการสนับสนุนให้มีการเผยแพร่ผล การศึกษาทั้งการเขียนเป็นเอกสารและนำเสนอต่อประชุมทั้งระดับจังหวัด ระดับประเทศ หรืออื่น ๆ เพื่อ เป็นประโยชน์ต่อครูที่สอนในรายวิชาและระดับเดียวกัน

Lewis (2002 อ้างถึงใน สัมพันธ์ถิ่นเวียงทอง, 2555) กล่าวว่า การศึกษาชั้นเรียนมีแนวคิด พื้นฐานง่าย ๆ แต่เป็นกระบวนการที่สลับซับซ้อนมาก กล่าวคือ ถ้าครูต้องการปรับปรุงการสอน สิ่ง ที่ จะต้องทำก็คือ ร่วมมือกันกับเพื่อนครูเพื่อวางแผน สังเกต และสะท้อนผลบทเรียน แต่การดำเนินการตาม ขั้นตอนดังกล่าว ต้องมีการวางแผนเป้าหมายการทำงานร่วมกัน มีการรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับการเรียนรู้ของ นักเรียนอย่างระมัดระวัง และมีการอภิปรายอย่างสร้างสรรค์เกี่ยวกับประเด็นที่เป็นความยุ่งยาก การศึกษาชั้นเรียนเป็นวงจรการปรับปรุงการสอนที่ดำเนินการโดยครู (Teacher-led Instruction Improvement Cycle) ในวงจรนี้ครูจะร่วมมือกันเพื่อดำเนินการดังต่อไปนี้

- 1) ตั้งเป้าหมายสำหรับการเรียนรู้ของนักเรียนและพัฒนาการในระยะยาว
- 2) ร่วมกันวางแผน “บทเรียนที่ทำการศึกษา (Research Lesson)” เพื่อนำไปใช้ สอน แล้วนำนักเรียนไปสู่เป้าหมายที่วางไว้
- 3) ดำเนินการนำบทเรียนไปใช้สอน โดยสมาชิกคนใดคนหนึ่งในที่มนำบทเรียนไปใช้ สอน สมาชิกคนอื่นช่วยกันรวบรวมหลักฐานเกี่ยวกับการเรียนรู้และพัฒนาการของนักเรียน
- 4) การอภิปรายเกี่ยวกับหลักฐานที่ ได้รวบรวมระหว่างทำการเรียนการสอน ใช้ หลักฐานเหล่านั้นเพื่อปรับปรุงบทเรียนให้ดีขึ้น
- 5) การสอนบทเรียนที่ ได้รับการแก้ไข อีกครั้ง ในชั้นเรียนอีกชั้นหนึ่ง ถ้าต้องการ ทำการศึกษาแล้วทำการปรับปรุงบทเรียนอีกครั้งหนึ่ง

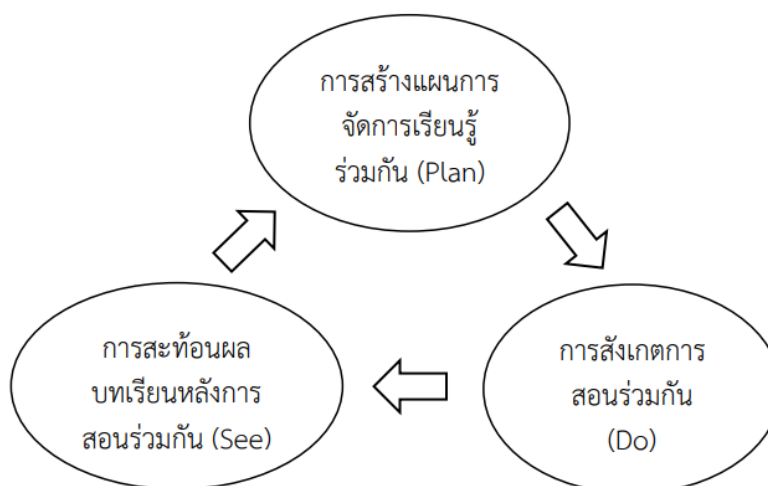
Inprasitha (2011) กล่าวว่า ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น (Center of Research in Mathematics Education: CRME) ได้นำการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) มาปรับใช้ ในบริบทของประเทศไทย โดยมี 3 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

- 1) การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน (Plan) เป็นการร่วมมือกันของทีมศึกษาชั้น เรียน โดยพยายามเอาเนื้อหาสาระที่ต้องการสอนมาทำให้อยู่ในรูปสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด (Open – ended Problems) จากนั้นพยายามทำสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้อยู่ในรูป

กิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ตามแบบของวิธีการแบบเปิด (Open Approach)

2) การสังเกตการสอนร่วมกัน (Do) ในขั้นตอนนี้จะมีครูหนึ่งคนนำแผนการสอนไปใช้ในชั้นเรียน โดยดำเนินการสอนตามวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ส่วนครูคนอื่นทำหน้าที่สังเกตการสอนในชั้นเรียน โดยเป้าหมายของการสังเกต คือ เน้นการสังเกตกระบวนการคิดของผู้เรียน ไม่ใช่พิจารณาความสามารถในการสอนของครู

3) การสะท้อนผลบทเรียนหลังการสอนร่วมกัน (See) ที่มีการศึกษาชั้นเรียนจะสะท้อนผลร่วมกัน โดยจะสะท้อนเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสังเกตการสอน เพื่อนำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขแผนการจัดการเรียนรู้ทำให้ที่การศึกษาชั้นเรียนทุกคนได้มีโอกาสทำความเข้าใจกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน รวมทั้งแนวคิดต่าง ๆ ที่นักเรียนตอบสนองต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดขึ้น ขั้นตอนของการศึกษาชั้นเรียนเรียน (Lesson Study) ที่ถูกนำมาปรับใช้ในบริบทของประเทศไทย 3 ขั้นตอน สามารถแสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 1 แสดงขั้นตอนของการศึกษาชั้นเรียนถูกนำมาปรับใช้ในบริบทของประเทศไทย

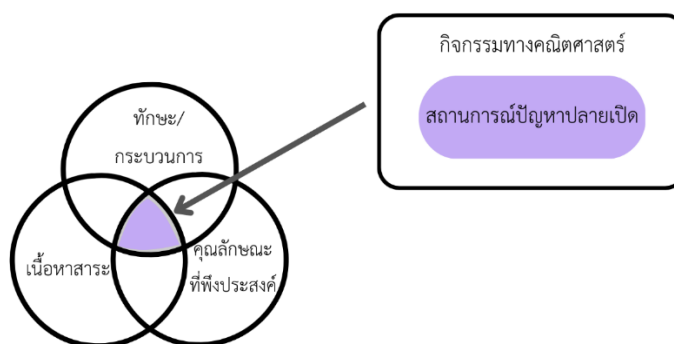
จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) คือ แนวทางหรือวิธีการในการพัฒนาวิชาชีพครูที่ใช้โรงเรียนเป็นฐานของการพัฒนา เน้นการทำงานร่วมกันอย่างต่อเนื่องของครูผู้สอน ครูผู้สังเกต ผู้บริหาร และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องของโรงเรียน โดยมีขั้นตอนการ

ปฏิบัติร่วมกัน 3 ขั้นตอน คือ 1) การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน 2) การสังเกตการสอนร่วมกัน และ 3) การสะท้อนผลบทเรียนหลังการสอนร่วมกัน

2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด (Open Approach)

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2546) ได้นำเสนอแนวคิดทางการศึกษาเพื่อจะปรับเปลี่ยนกระบวนการทัศน์ของครูทางด้านการสอน และการปรับปรุงพัฒนาการสอนอย่างต่อเนื่อง ซึ่งเป็นวิธีการสอนแบบใหม่ที่เรียกว่า “วิธีการแบบเปิด (Open Approach)” หลักสำคัญของวิธีการสอนแบบนี้อยู่ที่การให้ความสำคัญกับเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยเฉพาะความแตกต่างทางด้านการคิด ครูจะสอนอย่างไรที่การคิดของนักเรียนทุกคนในชั้นเรียนได้รับความสำคัญ วิธีการภาคปฏิบัติที่ได้ปรับมาจากแนวคิดของประเทศญี่ปุ่นก็คือ การออกแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อสร้างสถานการณ์ปัญหาที่เปิดกว้างรองรับแนวคิดของนักเรียนในชั้นเรียนให้ได้มากที่สุดหรือทุกคน ซึ่งในภาคปฏิบัติสถานการณ์ปัญหาสามารถเป็นกลไกขับเคลื่อนการบูรณาการองค์ประกอบสาระการเรียนรู้

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์(2546) กล่าวว่า การที่จะบูรณาการองค์ประกอบสาระการเรียนรู้ทั้ง 3 องค์ประกอบ ได้แก่ เนื้อหาสาระ ทักษะ/กระบวนการ และคุณลักษณะที่พึงประสงค์เข้าด้วยกันนั้นทำได้โดยการทำให้ชั้นเรียนเป็นชั้นเรียนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาโดยการการออกแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2 แสดงการบูรณาการองค์ประกอบสาระการเรียนรู้โดยใช้สถานการณ์ปัญหา (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

Nohda (1983 อ้างถึงใน ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2547) ได้กล่าวว่า วิธีการแบบเปิด มีแนวคิดสำคัญอยู่ 3 ประการ ดังนี้

1) การเปิดใจของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดมุ่งเน้นที่จะเปิดใจของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์มากกว่าการเน้นการสอนเนื้อหาให้ครบ ครูที่ใช้วิธีการแบบเปิดในการสอนต้องพยายามทำความเข้าใจแนวคิดของนักเรียนให้ได้มากที่สุด โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายหรือแลกเปลี่ยนแนวคิดกับนักเรียนคนอื่น การสอนโดยให้วิธีการแบบ เปิดยึดหลัก 3 ประการ ดังนี้

(1) มีความสัมพันธ์กับความเป็นอิสระของกิจกรรมของนักเรียน นั่นคือ ครูผู้สอนจะต้องตระหนักในคุณค่าของกิจกรรมของนักเรียน ให้อิสระกับนักเรียน โดยที่พยายามไม่เข้าไปแทรกแซงโดยไม่จำเป็น

(2) มีความสัมพันธ์กับธรรมชาติของความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะในเชิงวิวัฒนาการและเชิงบูรณาการ เนื่องจากเนื้อหาคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ เป็นระบบและมีความเป็นทฤษฎี ดังนั้นความรู้เรื่องใดเรื่องหนึ่งที่มีความสำคัญมากเท่าใดก็ยิ่งทำให้เกิดความรู้ที่มีลักษณะเชิงอุปมา มีความพิเศษ และความเป็นลักษณะทั่ว ๆ ไปมากขึ้นเท่านั้น อุปมาเทียบได้กับว่าความรู้ที่มีความสำคัญมากก็ยิ่งจะรู้ได้ล่วงหน้าว่าสามารถเปิดประตูสู่โลกแห่งความกว้างได้มาก ในขณะเดียวกันความรู้ต้นกำเนิดที่มีความสำคัญ ก็จะได้รับ การสะท้อนอีกหลาย ๆ ครั้ง ต่อมาบนเส้นทางของการวิวัฒนาการเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ การได้มีโอกาสไตร่ตรองหลาย ๆ ครั้งเกี่ยวกับความรู้ต้นกำเนิดนั้นจะเป็นแรงผลักดันให้ก้าวเข้าไปสู่ประตูของโลกแห่งความกว้างที่กล่าวมา

(3) มีความสัมพันธ์กับการตัดสินใจที่มีประโยชน์ของครูในห้องเรียน ในห้องเรียนคณิตศาสตร์บ่อยครั้งที่ครูต้องเผชิญกับแนวคิดของนักเรียนที่ครูไม่ได้คาดการณ์มาก่อน ในลักษณะนี้ครูจะต้องมีบทบาทสำคัญในการที่จะทำให้นักเรียนเหล่านั้นได้มีบทบาทอย่างเต็มที่ในชั้นเรียน และพยายามที่จะทำให้นักเรียนคนอื่นสามารถที่จะเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดที่ไม่ได้คาดการณ์มาก่อนได้

2) การเปิดและชนิดของปัญหา สามารถจำแนกปัญหาปลายเปิดได้เป็น 3 แบบ คือ

(1) กระบวนการเปิด (Process is open) หมายถึง กระบวนการที่นักเรียนจะใช้ในการแก้ปัญหา มีหลายแนวทาง นักเรียนมีอิสระที่จะใช้แนวทางอะไรก็ได้ตามความสามารถหรือความรู้เดิมของตนเอง

(2) ผลลัพธ์เปิด (End products are open) ปัญหาปลายเปิดแบบนี้ในวิธีการแบบเปิด เมื่อกำหนดปัญหาให้นักเรียน ปัญหานั้นต้องเป็นปัญหาที่มีคำตอบที่ถูกต้องหลากหลายคำตอบ

(3) แนวทางการพัฒนาของปัญหาเปิด (Ways to development are open) หลังจากที่นักเรียนได้แก้ปัญหาไปแล้ว นักเรียนสามารถพัฒนากระบวนการแก้ปัญหาของตนเองไปเป็นปัญหาใหม่ หรือเข้าสู่การแก้ปัญหาใหม่ด้วยการเปลี่ยนแปลงหรือแก้ไข เงื่อนไขหรือองค์ประกอบของปัญหาเดิม หรือที่เรียกว่า จากปัญหาสู่ปัญหา

3) การประเมินแนวทางคำตอบของนักเรียน จุดประสงค์ของวิธีการแบบเปิดไม่ใช่เพียงต้องการให้ได้คำตอบที่ถูกต้องแต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่ต้องการส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์และการคิดเชิงสร้างสรรค์ของนักเรียนอีกด้วย ในการประเมินแนวทางของคำตอบของนักเรียน สามารถพิจารณาได้จากเกณฑ์ดังต่อไปนี้

(1) Fluency จำนวนของคำตอบหรือแนวทางในการแก้ปัญหาที่นักเรียนสร้างขึ้นมามีอย่างน้อยเพียงใด

(2) Flexibility ความแตกต่างของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนแต่ละคนค้นพบมีมาก น้อยเพียงใด

(3) Originality ระดับความเป็นต้นแบบหรือแนวความคิดริเริ่มของนักเรียนอยู่ในระดับไหน

(4) Elegance ระดับของการนำเสนอแนวคิดของนักเรียนมีความชัดเจนและง่ายเพียงใด

เกณฑ์เหล่านี้จำเป็นต้องมีการประเมินทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ โดยในสองเกณฑ์แรกครูสามารถประเมินจากการนับจำนวนแนวทางคำตอบของนักเรียนได้

Inprasitha (2011) กล่าวว่า ในการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด (Open Approach) เพื่อสร้างชั้นเรียนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา มีอยู่ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1) ขั้นการนำเสนอปัญหาปลายเปิด (Posing open-ended Problem) เป็นการนำเสนอปัญหาปลายเปิดให้กับนักเรียน โดยจุดเน้นของการนำเสนอปัญหาปลายเปิด คือ การทำให้ปัญหานั้นเป็นปัญหาของนักเรียนให้ได้ เมื่อปัญหาปลายเปิดถูกนำเสนอขึ้นในชั้นเรียนแล้ว บ่อยครั้งที่ครูจะถามนักเรียนว่า “นักเรียนค้นพบคุณสมบัติ (ความสัมพันธ์ กฎ วิธีการในคณิตศาสตร์ ฯลฯ) อะไรบ้าง” คำถามเช่นนี้อาจสร้างความสับสนต่อนักเรียนบางคนในช่วงต้นของวิธีการนี้ เพราะนักเรียนไม่คุ้นเคยกับการใช้คำว่า สมบัติ ความสัมพันธ์ กฎ วิธีการในคณิตศาสตร์หรือการตอบสนองต่อปัญหานั้น ดังนั้นนักเรียนจึงไม่เข้าใจว่าครูคาดหวังให้เขาทำอะไร เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจความหมายของปัญหาสามารถนำแนวทางต่อไปนี้ไปใช้ได้ เช่น การกระตุ้นให้นักเรียนสนใจประเด็นเดียวกัน ให้ข้อมูลเพิ่มเติมสำหรับให้นักเรียนทำเป็นกรณีทั่วไป ให้ตัวอย่างที่ไม่จำกัดวิธีคิดในการแก้ปัญหาของนักเรียน สร้างสื่อการเรียนการสอนที่ชัดเจนและมีประโยชน์

2) ขั้นนักเรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง (Student's self-learning) เป็นการให้นักเรียน เรียนรู้ด้วยตัวเองในขณะที่นักเรียนกำลังแก้ปัญหา โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการเรียนรู้ด้วยตัวเองเพียงคนเดียวมาเป็นการเรียนรู้ร่วมกับผู้อื่น ครูต้องระมัดระวังที่จะไม่ให้เกิดการเอาเปรียบนักเรียนทุกคน โดยการให้ความคิดที่ถูกต้องแก่นักเรียนเป็นการเฉพาะ รูปแบบการสอนแบบนี้เหมือนการสอนปกติที่ประกอบด้วยการทำงานร่วมกันของสองสิ่ง นั่นคืองานเดี่ยวและการอภิปรายโดยสมาชิกทั้งชั้น อย่างไรก็ตาม เนื่องจากเราไม่สามารถมองหาคำตอบเพียงคำตอบเดียวเราจึงคาดหวังแนวคิดหรือมุมมองใหม่อย่างน้อยหนึ่งแนวคิดที่ยังไม่เคยปรากฏแก่นักเรียนมาก่อน ซึ่งเกิดในชั้นที่บทเรียนกำลังดำเนินไปจากการเรียนรู้เฉพาะคนไปสู่การอภิปรายพูดคุยทั้งชั้นเรียน สิ่งสำคัญของวิธีการนี้คือ เพื่อดำเนินการเรียนรู้เฉพาะบุคคลไปสู่การเรียนรู้เป็นกลุ่มนั่นเอง

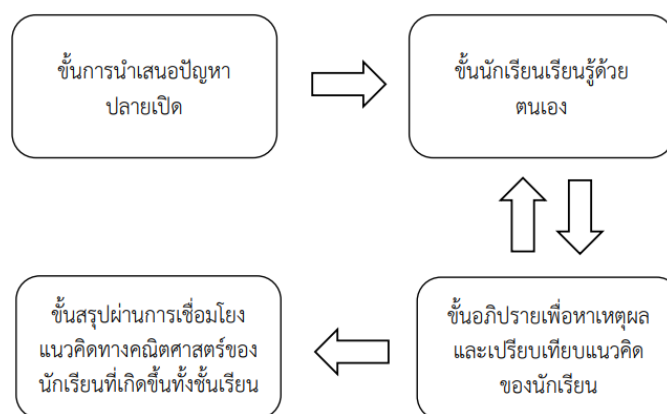
3) ขั้นอภิปรายเพื่อหาเหตุผลและเปรียบเทียบแนวคิดของนักเรียน (Whole class discussion and comparison) เป็นการนำแนวคิดที่หลากหลายของนักเรียนมาอภิปรายทั้งชั้นเพื่อให้ นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นได้มีโอกาสเรียนรู้จากแนวคิดของเพื่อน และเป็นสิ่งสำคัญมากที่จะต้องเขียนบันทึกคำตอบ แนวทางคำตอบของปัญหาที่เกิดขึ้นจากนักเรียนแต่ละคน แต่ละกลุ่มเพื่อใช้ในการศึกษาครั้งต่อไป ดังนั้นการใช้หนังสือเรียนหรือใบงานอาจจะเป็นวิธีการที่สะดวกแก่นักเรียนในการบันทึกข้อมูลเหล่านั้น นอกจากนี้แล้วการรวบรวมใบงานหลังจบบทเรียนครูสามารถใช้ในการประเมินการเรียนรู้รายบุคคลหรือ

เป็นกลุ่มได้อีกด้วย เนื่องจากกิจกรรมของนักเรียนมีความสำคัญต่อการพัฒนาบทเรียนต่อไปอย่างมาก ครูควรพยายามกระตุ้นนักเรียนคนที่ยังไม่เข้าใจปัญหาแล้วให้

ตัวอย่างหรือคำแนะนำเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดในแนวทางที่สัมพันธ์กับปัญหาสิ่งนี้ที่เกิดขึ้นได้ขณะที่ครูเดินไปทั่วชั้นเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อกวาดตาดูงานที่นักเรียนทำอย่างละเอียด

4) ขั้นสรุปผ่านการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นทั้งชั้นเรียน (Summarization through connecting students' mathematical ideas emerged in the classroom) เป็นการขยายแนวคิดโดยการเชื่อมโยงจากแนวคิดต่าง ๆ ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในห้องเรียน ในชั้นการเรียนรู้ด้วยตัวเองของนักเรียนและชั้นการอภิปรายทั้งชั้นเรียนสามารถย้อนกลับไปได้กลับมาได้ เช่น ในกรณีที่มีแนวคิดของนักเรียนเกิดขึ้นบางครั้งอาจไม่ต้องรอให้แนวคิดเกิดขึ้นเต็มทั้งชั้นเรียน เราสามารถนำแนวคิดมาอภิปรายในขณะนั้น ดังนั้นในสองขั้นตอนนี้จึงมีส่วนที่ทับซ้อนกันและสามารถย้อนกลับไปได้ อย่างไรก็ตามเมื่อเราไม่ได้มองที่คำตอบเพียงอย่างเดียว เราสามารถคาดหวังในแนวคิดใหม่ ๆ บางอย่างที่นักเรียนยังไม่ได้เรียนจากนักเรียนที่จะออกมาแบบสด ๆ จากใครสักคนเพื่อที่จะมาอภิปรายต่อชั้นเรียน มันเป็นสิ่งสำคัญในการนำแนวคิดจากหนึ่งคน ไปสู่การเรียนรู้เป็นกลุ่ม

ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด (Open Approach) 4 ขั้นตอน ตามแนวคิดของ Inprasitha (2011) สามารถแสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



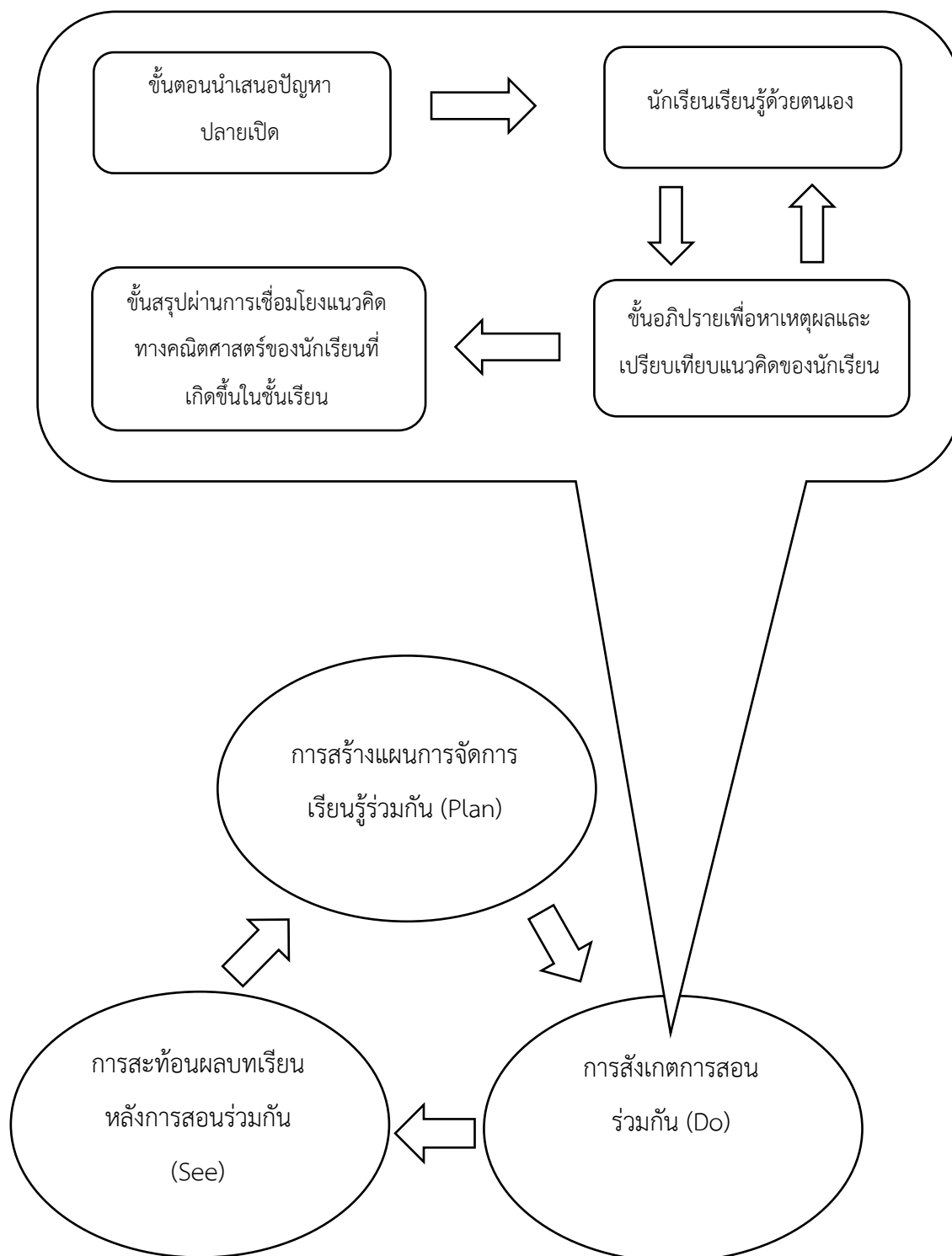
ภาพที่ 3 แสดงขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด (Open Approach) 4 ขั้นตอน ตามแนวคิดของ

Inprasitha (2011)

3. แนวคิดเกี่ยวกับการบูรณาการการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2557) กล่าวว่า ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ได้นำนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) และการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด (Open Approach) มาใช้ในโรงเรียนเพื่อเป็นการพัฒนาวิชาชีพครูระยะยาว (2549-2551) โดยเป็นความร่วมมือกับสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ดำเนินกิจกรรมตามโครงการ “วิจัยและพัฒนารูปแบบการพัฒนากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยวิธีการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach)” โดยการนำการพัฒนาวิชาชีพครูของญี่ปุ่นที่เรียกว่า “การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study)” มาใช้เป็นแนวทางหลักในการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ของไทย ภายใต้การศึกษาชั้นเรียนนั้น วิธีการแบบเปิด (Open Approach) ถูกนำเข้ามาในฐานะที่เป็นวิธีการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา

Inprasitha (2011) กล่าวว่า เพื่อให้ชั้นเรียนคณิตศาสตร์เป็นชั้นเรียนของการแก้ปัญหา (Problem solving Classroom) จึงได้นำลักษณะบางประการของวิธีการแบบเปิด (Open Approach) มาผนวกเข้ากับการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) นั่นคือวิธีการแบบเปิดถูกนำมาใช้ในฐานะที่เป็นวิธีการสอนภายใต้กระบวนการการศึกษาชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 4 แสดงการบูรณาการการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดตามแนวคิดของ Inprasitha (2011)

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ได้ถูกนำมาปรับใช้ในบริบทของการศึกษาไทย การศึกษาชั้นเรียนได้ถูกนำมาเป็นแนวทางหรือวิธีการในการพัฒนาวิชาชีพครูโดยเน้นการทำงานร่วมกันของครู ส่วนวิธีการแบบเปิดถูกนำมาใช้ในฐานะที่เป็นวิธีการสอนภายใต้กระบวนการการศึกษาชั้นเรียน ซึ่งทั้งสองนวัตกรรมนี้จะทำควบคู่กันไปเพื่อพัฒนาวิชาชีพและการสอน

4. แนวคิดเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์

Kotou (1990, cited in Wada, 2010) กล่าวว่า ในวิชาคณิตศาสตร์การพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Ideas) ของผู้เรียนเป็นสิ่งสำคัญ ดังนั้นเราควรจะต้องจัดประเภทของความหลากหลายทางแนวคิดเพื่อที่เราจะได้พัฒนาและจัดระบบแนวคิดเหล่านี้ด้วยขั้นตอนการตรวจสอบเปรียบเทียบในชั้นเรียน ซึ่งแนวคิดต่าง ๆ สามารถจัดประเภทได้ 4 ประเภท ดังนี้

1) แนวคิดแบบอิสระ คือแนวคิดที่หลากหลายเมื่อผู้เรียนได้นำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์และเป็นอิสระจากแนวคิดอื่น สามารถจำแนกได้ด้วยการให้ความสนใจตามความเหมาะสมของแนวคิด

2) แนวคิดที่เป็นลำดับขั้น คือเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์และสามารถจัดลำดับมุมมองด้านประสิทธิภาพได้สามารถจำแนกได้ด้วยการให้ความสนใจกับประสิทธิภาพของแนวคิด

3) แนวคิดที่สามารถรวมกันได้คือเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และสามารถรวบรวมเป็นหนึ่งแนวคิด โดยให้ความสนใจที่วิธีการและคำตอบ สามารถจำแนกได้ด้วยการให้ความสนใจกับคุณสมบัติทั่วไปของแนวคิด

4) แนวคิดที่สัมพันธ์กัน คือเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และสามารถรวบรวมเป็นหนึ่งกลุ่มแนวคิด มากไปกว่านั้นคือ กลุ่มแนวคิดนี้สามารถรวมเป็นหนึ่งระบบจากมุมมองด้านความสัมพันธ์ สามารถจำแนกได้ด้วยการให้ความสนใจกับความสัมพันธ์ของแนวคิด

Vergnaud (1988, อ้างถึงใน อัจฉริยา พงศ์พิชญ 2551) ได้ให้ความหมายว่า แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Ideas) ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ ได้แก่

1) กลุ่มของสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด (A Set of Open-Ended Problem Solving Situations) หมายถึง สถานการณ์ย่อยที่ได้จากปัญหาปลายเปิด เป็นการสืบเสาะ ตีความของนักเรียนขณะเผชิญปัญหา เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย เป็นวิธีการที่นักเรียนนำมาใช้หาคำตอบโดยอาศัยประสบการณ์ของตนเอง

2) กลุ่มของความคงที่ (A Set of Invariants) หมายถึง วิธีการแก้ปัญหาในแต่ละสถานการณ์ การแก้ปัญหาที่ใช้วิธีการที่คล้ายกันในการอธิบายขั้นตอนหรือวิธีการแก้ปัญหาเพื่อแสดงถึงความหมาย (Signified) ของแนวคิดที่เกิดขึ้นในแต่ละสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด

3) กลุ่มของการแสดงแทนในเชิงสัญลักษณ์ (A Set of Symbolic) หมายถึง การเขียนตัวเลข เครื่องหมาย หรือสัญลักษณ์ที่นักเรียนเลือกใช้ เป็นตัวแสดงแทนความหมาย (Signifier) แทนคำพูดที่นักเรียนอธิบายขั้นตอนหรือวิธีการแก้ปัญหาในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด

นุจรินทร์ เอ็มชัยภูมิ(2557) กล่าวว่า แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หมายถึง วิธีการแก้ปัญหานักเรียนที่มีต่อสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่แสดงออกในรูปของการพูด การหยิบจับ การขีดเขียน การแสดงสีหน้าท่าทาง โดยแสดงออกตามกรอบของ Shimizu (2013) ประกอบด้วย ความเข้าใจ (Understanding) การคำนวณ (Computing) การประยุกต์ใช้ (Applying) การให้เหตุผล (Reasoning) การลงมือปฏิบัติ (Engaging)

Isoda & Katagiri (2012 อ้างถึงใน จตุพร นาสินสร้อย, 2557) กล่าวว่า ความสำคัญที่สุดที่จะต้องมีการปลูกฝังเข้าไปในการคิดและการตัดสินใจอย่างเป็นอิสระของเด็กอย่างต่อเนื่อง คือ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ช่วยให้ทำความเข้าใจความสำคัญของการใช้ความรู้และทักษะการเรียนรู้ วิธีการเรียนรู้ด้วยตนเอง และการบรรลุความสามารถที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ที่เป็นอิสระ รวมทั้งการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนยังสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการจัดการเรียนการสอนด้วยเหตุนี้การแสดงแนวคิดของนักเรียนในการแก้ปัญหานักเรียนจึงเป็นสิ่งที่มีความสำคัญ

Isoda & Katagiri (2012) กล่าวว่า โครงสร้างของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ ดังนี้

1) การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical thinking related to mathematics methods) ซึ่งสามารถแบ่งวิธีการทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 11

ประเภท ได้แก่ การคิดแบบอุปนัย การคิดแบบอุปมา การคิดแบบนิรนัย การคิดเชิงบูรณาการ การคิดเชิงพัฒนาการ การคิดเชิงนามธรรม การคิดที่ทำให้ง่ายขึ้น การคิดที่แสดงนัยทั่วไป การคิดที่เชี่ยวชาญ การคิดที่เป็นสัญลักษณ์ และการคิดที่แสดงถึงตัวเลขปริมาณและตัวเลข

2) การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (แนวคิด) (Mathematical thinking related to mathematical content (mathematical ideas)) ซึ่งสามารถแบ่งแนวคิดทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 9 ประเภท ได้แก่ แนวคิดเกี่ยวกับเซต แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำและแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด

3) ทักษะทางคณิตศาสตร์ (Mathematical attitude) ซึ่งสามารถแบ่งทักษะทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ การทำให้เป็นรูปธรรม ความสมเหตุสมผล ความชัดเจน และความซับซ้อน

Isoda & Katagiri (2012) กล่าวว่า การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematical thinking related to mathematical content) หรือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical ideas) มีแนวคิดทั้งหมด 9 แนวคิด ดังนี้

1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) เป็นการชี้แจงเซตของสิ่งของ เพื่อการพิจารณาสิ่งของที่แยกออกจากเซต และการชี้แจงเงื่อนไขสำหรับการรวมเข้าด้วยกัน โดยแนวคิดเกี่ยวกับเซต มีแนวคิดดังนี้

(1) จัดกลุ่มสิ่งของอย่างชัดเจนเพื่อการพิจารณา เป็นแง่มุมสำคัญของแนวคิดเกี่ยวกับเซต ตัวอย่างเช่น เมื่อนับสิ่งของ การนับอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอ สิ่งสำคัญ คือ ต้องทำความเข้าใจให้ดีเกี่ยวกับขอบเขตของสิ่งของที่จะนับก่อน

(2) พิจารณาว่าสิ่งของที่อยู่ภายใต้การพิจารณาอยู่ในเซตใดเซตหนึ่งหรือไม่โดยขึ้นอยู่กับชื่อหรือเงื่อนไขที่ตระหนักถึงว่า ชื่อหรือเงื่อนไขที่ใช้นั้นใช้เพื่อแสดงเซต ชี้แจงสิ่งของที่ไม่ได้เป็นเซตเพื่อปรับปรุงความชัดเจนของเซตเดิม

(3) เมื่อจับเซตของสิ่งของ ให้ตระหนักถึงว่ามีวิธีการแสดงให้เห็นสมาชิก และวิธีการแสดงให้เห็นเงื่อนไขในการเป็นเซต โดยใช้วิธีการที่แตกต่างกันด้วยความเหมาะสม

(4) รักษามุมมองให้ครอบคลุมที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ นำเสนอสิ่งของให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้และปฏิบัติต่อสิ่งเหล่านั้นให้เป็นสิ่งเดียวกัน เพื่อให้สิ่งเหล่านั้นทั้งหมดสามารถพิจารณารวมกันได้

(5) การคิดแยกกลุ่มหรือจัดหมวดหมู่ของ โดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ขั้นแรกชี้แจงขอบเขตของสิ่งของที่ต้องการแยกประเภท ต่อมาพิจารณามุมมองเกี่ยวกับการจำแนกประเภทที่ตรงกับวัตถุประสงค์ ต่อมาพิจารณามุมมองที่เป็นตำแหน่งที่วางของสิ่งของทุกประเภทที่อยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง โดยไม่มีสิ่งหนึ่งสิ่งใดอยู่ในสองกลุ่มที่แตกต่างกัน และสิ่งของนั้นสามารถแยกกลุ่มได้โดยไม่ถูกตัดออกจากกลุ่มหรือซ้อนทับกัน ต่อมาหาเงื่อนไขให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ในการจำแนกประเภทและพิจารณาคุณค่าของการแยกประเภทเหล่านี้ และสุดท้ายพิจารณาว่า บางครั้งสามารถผสมผสานหลายหมวดหมู่เข้ากับการจำแนกประเภทใหญ่ ๆ ได้

2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (Idea of units) เป็นการมุ่งเน้นองค์ประกอบของขนาดและความสัมพันธ์โดยแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย มีแนวคิด คือ ตัวเลขประกอบไปด้วยหน่วยต่าง ๆ เช่น 1, 10, 100, 0.1, และ 0.01 รวมทั้งหน่วยเศษส่วน เช่น $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{3}$ และจะแสดงในรูปของจำนวนหน่วยที่มีอยู่ ดังนั้นหน่วยเหล่านี้เป็นการพิจารณาขนาดของตัวเลข การคำนวณและอื่น ๆ นอกจากนี้ยังกล่าวได้ว่าจำนวนดังกล่าวจะแสดงด้วยหน่วยต่าง ๆ เช่น เซนติเมตร เมตร ลิตร กรัม และตารางเมตร และสามารถใช้หน่วยเบื้องต้นได้ ดังนั้นเมื่อพิจารณาการวัดปริมาณของบางสิ่งบางอย่างเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องให้ความสำคัญกับหน่วย นอกจากนี้ตัวเลขประกอบด้วยจุด เส้น (เส้นตรง ด้าน วงกลมและอื่น ๆ) และพื้นผิว (ฐาน ด้าน และอื่น ๆ) ด้วยเหตุผลนี้ การคิดที่มุ่งเน้นองค์ประกอบเหล่านี้ ขนาดของหน่วย ตัวเลข และความสัมพันธ์จึงเป็นสิ่งสำคัญ

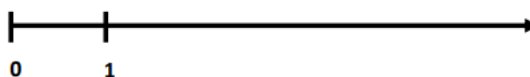
3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (idea of representation) เป็นความพยายามที่จะคิดบนพื้นฐานของหลักการพื้นฐานของการแสดงแทน โดยแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน มีแนวคิดดังนี้

จำนวนเต็ม เศษส่วน และเลขทศนิยมที่มีตัวหารเป็นเลขกำลัง 10 จะแสดงขึ้นอยู่กับระบบสัญกรณ์ค่าประจำหลักของฐาน เพื่อให้เข้าใจคุณสมบัติของตัวเลขหรือวิธีการคำนวณ สิ่ง

แรกต้องเข้าใจความหมายของการแสดงของระบบสัญญาณ ในการพิจารณาเศษส่วนก็เช่นกัน จะต้องมีความสามารถที่จะเห็น $3/2$ เป็นเศษส่วนที่หมายถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ของสามที่ลดลงครึ่ง ($3 \div 2$)

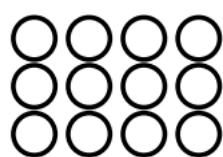
เป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องพิจารณาการวัดปริมาณขึ้นอยู่กับคำนิยามของการแสดง การวัดที่มีสองหน่วย เช่น 3 ลิตร และ 2 เดซิลิตร เขียนเป็น 3 l 2 dl เช่นเดียวกับคำนิยามของการเขียน การวัดกับหน่วยที่แตกต่างกัน เช่นในกรณี 10000 ตารางเมตร เขียนเป็น 1 เฮกตาร์

นอกจากนี้ เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนเกี่ยวกับเซตของตัวเลข มันเป็นสิ่งจำเป็นที่จะแสดงตัวเลขในหลากหลายรูปแบบที่เป็นรูปธรรม และเพื่อใช้ประโยชน์จากความรู้เกี่ยวกับคำนิยามของการแสดงแทนเหล่านี้ มีรูปแบบที่เรียกว่า “เส้นจำนวน” ซึ่งจะใช้สำหรับการแสดงตัวเลข เช่น วางจุดกำเนิด (0) บนเส้นตรง การกำหนดขนาดของหน่วย (1) และการใช้เพื่อให้สอดคล้องกับจุดและตัวเลขบนเส้นนี้ ใช้รูปแบบนี้ขึ้นอยู่กับคำนิยามของการแสดงแทนนี้

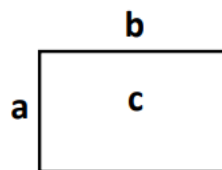


ภาพที่ 5 แสดงรูปแบบเส้นจำนวนใช้สำหรับแสดงตัวเลข

มีรูปแบบอื่น ๆ อีกมากมายที่นอกเหนือไปจากนี้ ตัวอย่างเช่น รูปของแถวหรือพื้นที่ (ภาพที่) สามารถใช้รูปแบบ $a \times b = c$ รูปเหล่านี้แสดงจำนวนของรูปวงกลมที่เรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยม หรือ “ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง ความกว้าง และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า” การคิดคำนียามที่เข้าใจได้อย่างเหมาะสมของการแสดงเหล่านี้และใช้ประโยชน์จากพวกเขาได้อย่างมีประสิทธิภาพเป็นสิ่งสำคัญ



แถว (Array figure)



พื้นที่ (Area figure)

ภาพที่ 6 แสดงรูปของแถวหรือพื้นที่

4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (idea of operation) เป็นการชี้แจงและขยายความหมายของการกระทำและการดำเนินการ และการพยายามที่จะคิดบนพื้นฐานเหล่านี้โดยแนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ มีแนวคิดดังนี้ “การดำเนินการ” หมายถึง การดำเนินการที่มีหลักที่ชัดเจนที่ใช้สำหรับการนับ การดำเนินการเลขคณิต ความสอดคล้องกัน การเพิ่มขึ้นและการลดลง (ในทำนองเดียวกัน) การวาดรูปและอื่น ๆ การดำเนินการเหล่านี้จะถูกใช้ในการคำนวณกับตัวเลข ที่จะคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปและวิธีการวาดของนักเรียนพิจารณาการคำนวณการบวก เนื่องจากความหมาย (คำนิยาม) จะถูกกำหนดอย่างละเอียด การตัดสินใจเกี่ยวกับการดำเนินการอย่างเป็นธรรมชาติจากความหมาย (คำนิยาม) ของการคำนวณ พร้อมกับวิธีการและคุณสมบัติของการคำนวณ นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติและวิธีการของการวาดรูป เช่นเดียวกับความสัมพันธ์ของรูปอื่น ๆ ที่จะชี้แจงครั้งแรกขึ้นอยู่กับความหมาย (คำนิยาม) ของรูปเหล่านั้น

5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (idea of algorithms) เป็นการพยายามที่จะทำให้วิธีการดำเนินการเป็นทางการหรือเป็นระเบียบแบบแผน โดยแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ มีแนวคิด คือ การคำนวณอย่างเป็นทางการจำเป็นต้องมีความเข้าใจที่ชัดเจนเกี่ยวกับวิธีการและความสามารถในการคำนวณเชิงกลไกบนพื้นฐานของความเข้าใจ โดยไม่ต้องคิดเกี่ยวกับความหมายของแต่ละขั้นตอน สิ่งนี้ช่วยให้สามารถรักษาความพยายามในการรับรู้และดำเนินการได้อย่างง่ายดายภายนอกจากนี้ยังใช้กับการวัดและการวาดภาพ การดำเนินการเชิงกลไกของขั้นตอนที่กำหนดไว้ เรียกว่าการใช้ "อัลกอริทึม" การคิดพยายามที่จะสร้างอัลกอริทึมโดยอาศัยความเข้าใจในขั้นตอนเป็นสิ่งสำคัญ

6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ (idea of approximations) เป็นความพยายามที่จะเข้าใจภาพรวมของสิ่งต่าง ๆ และการดำเนินการ โดยใช้ผลของความเข้าใจนี้โดยแนวคิดเกี่ยวกับการ

ประมาณ มีแนวคิด คือ ความเข้าใจทั่วไปเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพสำหรับการสร้างมุมมองในการแก้ปัญหาและผลลัพธ์ และเพื่อการตรวจสอบผลลัพธ์ โดยมีความเข้าใจตัวเลขโดยประมาณจำนวนหรือรูปร่าง หรือทำการคำนวณ หรือการวัดโดยประมาณ สามารถสร้างมุมมองบนผลลัพธ์หรือวิธีการและตรวจสอบผลลัพธ์

7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (idea of fundamental properties) เป็นการมุ่งเน้นไปที่กฎพื้นฐานและคุณสมบัติโดยแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน มีแนวคิดดังนี้แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน หมายถึง การคำนวณเกี่ยวข้องกับกฎต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น กฎการสับเปลี่ยน ตลอดจนคุณสมบัติต่าง ๆ นอกจากนี้ตัวเลขยังมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน เช่น ผลคูณและตัวหารนอกจากนี้ตัวเลขและรูปร่างยังมีคุณสมบัติ เช่น ด้านคู่ขนานมีความยาวด้านเท่ากัน สูตรพื้นที่ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยของจำนวน คุณสมบัติของจำนวน สัดส่วน สัดส่วนผกผัน กฎและคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์หรืออื่น ๆ อีกมากมาย เราต้องพิจารณาค้นหาสิ่งเหล่านี้เลือกสิ่งที่เหมาะสมและใช้อย่างมีประสิทธิภาพ การคิดที่มุ่งเน้นไปที่กฎพื้นฐานและคุณสมบัติเหล่านี้จึงขาดไม่ได้อย่างยิ่ง

8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking) เป็นการพยายามที่จะมุ่งเน้นไปที่สิ่งที่ถูกกำหนดโดยการตัดสินใจค้นหาของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร โดยแนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ มีแนวคิดดังนี้

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ หมายถึง เมื่อเราต้องการทราบบางอย่างเกี่ยวกับองค์ประกอบ y ในเซต Y หรือลักษณะและคุณสมบัติทั่วไปขององค์ประกอบทั้งหมดของ Y แม้ว่าจะยากที่จะชี้แจงสิ่งนี้โดยตรง แต่สิ่งแรกที่จะนึกถึงคือ x ซึ่งเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบใน Y โดยชี้แจงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y การคิดเกี่ยวกับคิดกับการกระทำพยายามที่จะชี้แจงลักษณะและคุณสมบัติเหล่านี้

ตัวอย่างเช่น สมมติว่าต้องการทราบพื้นที่ของวงกลมแต่ไม่ทราบว่าขนาดจะเป็นอย่างไร หรือจะหาได้อย่างไร ในสถานการณ์เช่นนี้ ลองนึกถึงบางสิ่งที่ยากต่อการวัดที่มีความสัมพันธ์กับพื้นที่ของวงกลม ความยาวของรัศมีเป็นเรื่องง่ายในการวัด นอกจากนี้เมื่อความยาวของรัศมีการเปลี่ยนแปลง ขนาดของวงกลมก็เปลี่ยนไปด้วยเช่นกัน เมื่อทราบความยาวของรัศมีแล้ว เราสามารถวาดวงกลมตามความยาวซึ่งกำหนดพื้นที่ของวงกลมนี้ด้วยเหตุนี้เราสามารถหาวิธีการหาพื้นที่โดยการพิจารณา

ความสัมพันธ์เกี่ยวกับการกระทำระหว่างรัศมีกับพื้นที่วงกลม ในการทำเช่นนี้ ให้รวบรวมค่าประมาณพื้นที่ของวงกลมและรัศมีที่ขนาดต่างกันและสรุปกฎขึ้นมาตามสิ่งที่พบ นอกจากนี้เพื่อที่จะแสดงกฎนี้อย่างชัดเจนให้คิดหาวิธีแสดงออกเป็นสูตร สร้างสูตร และใช้เพื่อกำหนดพื้นที่ของวงกลมเดิม

การคิดเกี่ยวกับการกระทำ : ต้องการคิดเกี่ยวกับโจทย์บางอย่าง แต่ยากที่จะพิจารณาเรื่องนี้โดยตรง ดังนั้นแทนที่จะพิจารณาโจทย์นี้โดยตรง แต่จะคิดเกี่ยวกับสิ่งที่เกี่ยวข้องและง่ายต่อการพิจารณา (หรือที่รู้จัก) แทน ความคิดนี้พยายามที่จะชี้แจงข้อเสนอของปัญหา ดังนั้นการคิดเกี่ยวกับการกระทำสามารถมองเป็น “การคิดที่เป็นตัวแทน” ได้

การปฏิบัติของการคิดเกี่ยวกับการกระทำนี้ถูกกำหนดโดยประเภทของความคิดดังต่อไปนี้:

(1) มุ่งเน้นไปที่การพึ่งพา ถ้าโจทย์ที่เรียกว่าโจทย์ A เปลี่ยนเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงโจทย์อย่างอื่นที่เรียกว่าโจทย์ B และตั้งค่า B ให้เป็นค่าบางอย่าง (สภาพ) และยังสามารถกำหนดค่า (สภาพ) ของ A ไปยังอีกค่าที่ตรงกันได้ กล่าวได้ว่า "A ขึ้นอยู่กับ B" หรือ "B และ A เป็น การพึ่งพากัน (ในความสัมพันธ์ที่พึ่งพากัน)" งานต่อไปคือการชี้แจงกฎที่ระบุว่า A เปลี่ยนแปลงเมื่อ B มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร อย่างแรกเมื่อพิจารณาโจทย์โดยตรงลงนึกถึงเรื่องอื่น ๆ ที่อยู่ในความสัมพันธ์พึ่งพา โจทย์ B และง่ายต่อการพิจารณา การใช้โจทย์ที่สองนี้ด้วยวิธีนี้คือ "การคิดเกี่ยวกับการกระทำ"

(2) การพยายามชี้แจงความสัมพันธ์เกี่ยวกับการกระทำ อาจเรียกว่า "การพยายามชี้แจงข้อบังคับที่สอดคล้องกัน" เมื่อการพึ่งพามีความชัดเจนแล้วสิ่งที่จำเป็นต่อไปคือ คิดเกี่ยวกับวิธีการชี้แจงกฎที่สอดคล้องกันระหว่างโจทย์ A และโจทย์ B ที่ต้องพึ่งพาอาศัยกัน กฎนี้จะบอกการเปลี่ยนแปลง A เมื่อ B มีการเปลี่ยนแปลง หรือ A จะเป็นอย่างไร เมื่อ B ถูกตั้งค่าเป็นบางอย่างไว้เมื่อกฎถูกค้นพบแล้วว่า สามารถใช้เพื่อกำหนดค่า A ตามค่าของ B หรือต้องกำหนดค่า B เพื่อให้ได้ค่าที่กำหนดจาก A ตัวอย่างเช่น เมื่อทราบว่าพื้นที่ของวงกลม a ขึ้นอยู่กับรัศมี สามารถมองหากฎที่เชื่อมต่อรัศมีและพื้นที่ ถ้ารู้ว่ากฎข้อนี้ (ความสัมพันธ์เกี่ยวกับการกระทำ) คือ พื้นที่ = รัศมี² $\times \pi$ (โดยที่ $\pi = 3.14$) จากนั้นสามารถใช้แทนค่าได้กล่าวคือ ถ้ากำหนดให้มีรัศมีเท่ากับ 10 จะหาพื้นที่ได้เท่ากับ $10 \times 10 \times 3.14$ หรือ 314 ถ้ากำหนดให้มีพื้นที่ 314 จะหารรัศมีได้เท่ากับ $314 \div 3.14 = 100 = 10 \times 10$ ซึ่งจะได้รัศมีเท่ากับ 10

แนวคิดชนิดใดที่ใช้ในการค้นหากฎประเภทนี้ในการหากฎให้ลองเปลี่ยนรัศมีไปตามความยาวที่ต่างกันและหาพื้นที่ที่สอดคล้องกัน ต้องทำตามประเภทของแนวคิดต่อไปนี้เพื่อจะหากฎประเภทนี้:

(a) แนวคิดเรื่องเซต รัศมีและพื้นที่สามารถกำหนดค่าต่าง ๆ ได้หลากหลาย กล่าวอีกนัยหนึ่งเราต้องตระหนักถึงคุณค่าที่ควรจะเป็น ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนเต็ม เศษส่วน หรือ ทศนิยม โดยทั่วไปเรื่องของการพิจารณาจะอยู่ในเซตบางอย่าง ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทราบว่าเซตนี้เป็นอย่างไร

(b) แนวคิดเรื่องตัวแปร เราต้องพิจารณาว่าจะเกิดอะไรขึ้นเมื่อองค์ประกอบต่าง ๆ ของเซตนี้แตกต่างกันไป เมื่อพูดถึงพื้นที่ของวงกลมให้ลองกำหนดรัศมีของวงกลมเป็น 3 cm, 5 cm, 10 cm, 15 cm เป็นต้น

(c) แนวคิดในเรื่องลำดับ ถ้าลองสุ่มค่าต่าง ๆ มา อาจจะทำให้ยากต่อการค้นพบกฎ ควรใช้ค่าต่อเนื่อง เช่น 5, 10, 15 และอื่น ๆ เพื่อทดสอบรัศมีวงกลม ซึ่งเรียกว่า "ความคิดในเรื่องลำดับ" ในกรณีของปรากฏการณ์มีรูปแบบที่เป็นเรื่องยากที่จะหา ลำดับจะเป็นประโยชน์ในการที่จะทำให้หารูปแบบนั้นเจอ

(d) แนวคิดในเรื่องความสอดคล้อง ถ้าเปลี่ยนค่าตามลำดับในวิธีการนี้การกำหนดค่าที่สอดคล้องกันในการพยายามค้นหาความสอดคล้องระหว่างคู่ของค่านั้นและกฎที่สอดคล้องกันเป็นหนึ่งใน การเปลี่ยนแปลงลำดับของตัวแปรในวิธีการนี้ มักจะพยายามพิจารณาว่าตัวแปรอื่นมีการเปลี่ยนแปลง โดยพยายามค้นหากฎหรือค้นหาวิธีการทั่วไประหว่างวิธีการที่สองตัวแปรนั้นสอดคล้องกันในค่าของวิธีการนี้ ซึ่งเป็นวิธีการที่มุ่งเน้นที่การเปลี่ยนและความสอดคล้องกัน

9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) เป็นการพยายามที่จะแสดงให้เห็นเจตย์และความสัมพันธ์ที่เป็นการแสดงความคิด และอ่านความหมายเหล่านั้น โดยแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด มีแนวคิดดังนี้

การคิดขึ้นอยู่กับการประเมินค่าในการแสดงแทนของปัญหาโดยใช้การแสดงความคิดตามประเภทต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

(a) การแสดงความคิดสามารถแสดงเจตน์และความสัมพันธ์ได้อย่างชัดเจนและ
เรียบง่าย

(b) การแสดงความคิดสามารถแสดงเจตน์หรือความสัมพันธ์โดยทั่วไป

(c) การแสดงความคิดสามารถแสดงถึงกระบวนการคิดได้อย่างชัดเจนและเรียบ
ง่าย

(d) การแสดงความคิดสามารถประมวลผลได้อย่างง่ายดายในลักษณะที่เป็นไปตามหลักการ

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด หมายถึง งานที่อ่านและใช้การแสดงออก
ด้วยวิธีต่อไปนี้:

(a) อ่านสถานการณ์ที่มีความเฉพาะเจาะจงหรือที่ใช้แสดงความคิด

(b) อ่านความสัมพันธ์ทั่วไปหรือเจตน์

(c) อ่านอย่างอิสระและความสัมพันธ์เกี่ยวกับการกระทำ

(d) อ่านรูปแบบของการแสดงความคิด

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน คือ วิธีการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีต่อสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะแสดงออกมาในรูปของ
ยุทธวิธี วิธีคิด หรือวิธีการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผ่านการพูด การเขียน หรือการแสดง
อิริยาบถต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน โดยจำแนกแนวคิดตามกรอบของ Isoda & Katagiri (2012) ได้ทั้งหมด 9
แนวคิด ได้แก่ 1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) 2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (idea of units) 3)
แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (idea of representation) 4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (idea of
operations) 5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (idea of algorithms) 6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ
(idea of approximation) 7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (idea of fundamental properties) 8)
แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking) และ 9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง
ความคิด (idea of expressions)

5. แนวคิดเกี่ยวกับการหาร

กระทรวงศึกษาธิการ (2560) ได้กล่าวถึง ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 ในสาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ดังต่อไปนี้

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
1. อ่านและเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทย และตัวหนังสือแสดงจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0	จำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 - การอ่าน การเขียนตัวเลขฮินดูอารบิก ตัวเลขไทยและตัวหนังสือแสดงจำนวน
2. เปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวนนับไม่เกิน 100,000 จากสถานการณ์ต่าง ๆ	- หลัก ค่าของเลขโดดในแต่ละหลัก และการเขียนตัวเลขแสดงจำนวนในรูปกระจาย - การเปรียบเทียบและเรียงลำดับจำนวน
3. บอก อ่านและเขียนเศษส่วนแสดงปริมาณสิ่งต่างๆ และแสดงสิ่งต่างๆ ตามเศษส่วนที่กำหนด	เศษส่วน - เศษส่วนที่ตัวเศษน้อยกว่าหรือเท่ากับตัวส่วน - การเปรียบเทียบและเรียงลำดับเศษส่วน
4. เปรียบเทียบเศษส่วนที่ตัวเศษเท่ากัน โดยที่ตัวเศษน้อยกว่าหรือเท่ากับตัวส่วน	
5. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์ แสดงการบวกและประโยคสัญลักษณ์แสดงการลบของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0	การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 - การบวกและการลบ - การคูณการหารยาวและการหารสั้น
6. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยคสัญลักษณ์ แสดงการคูณของจำนวน 1 หลักกับจำนวนไม่เกิน 4 หลักและจำนวน	- การบวก ลบ คูณ หารระคน - การแก้โจทย์ปัญหาและการสร้างโจทย์ปัญหา พร้อมทั้งหาคำตอบ

2 หลัก กับจำนวน 2 หลัก 7. หาค่าของตัวไม่ทราบค่าในประโยค สัญลักษณ์แสดงการหารที่ตัวตั้งไม่เกิน 4 หลัก ตัวหาร 1 หลัก 8. หาผลลัพธ์การบวก ลบ คูณ หารระคน ของ จำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0 9. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 2 ขั้นตอน ของจำนวนนับไม่เกิน 100,000 และ 0	
10. หาผลบวกของเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน และผลบวกไม่เกิน 1 และหาผลลบของ เศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากัน 11. แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาการ บวกเศษส่วนที่มีตัวส่วนเท่ากันและผลบวกไม่ เกิน 1 และโจทย์ปัญหาการลบเศษส่วนที่มีตัว ส่วนเท่ากัน	การบวก การลบเศษส่วน - การบวกและการลบเศษส่วน - การแก้โจทย์ปัญหาการบวกและโจทย์ปัญหา - การลบเศษส่วน

ตารางที่ 1 แสดงตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง มาตรฐาน ค 1.1

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้

ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
1. ระบุนับจำนวนที่หายไปในรูปแบบของจำนวนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละเท่า ๆ กัน	แบบรูป -แบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละเท่า ๆ กัน

ตารางที่ 2 แสดงตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง มาตรฐาน ค 1.2

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) (2563) ได้กล่าวในหนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เรื่อง การหาร ไว้ดังต่อไปนี้

สถานการณ์การหาผลหารและเศษที่ตัวตั้ง 2 หลัก ตัวหารและผลหาร 1 หลักโดยการหารยาว โดยเริ่มจาก การแนะนำ การหารยาวก่อนตามหนังสือเรียน เช่น ครูมีดินสอ 30 แท่ง แบ่งให้นักเรียน 5 คน คนละเท่า ๆ กัน นักเรียนจะได้ดินสอคนละกี่แท่ง จากสถานการณ์ครูให้นักเรียนช่วยกันวิเคราะห์และเขียนประโยคสัญลักษณ์ โดยใช้การถาม - ตอบ ดังนี้

- ครูมีดินสอกี่แท่ง (ครูมีดินสอ 30 แท่ง)
- แบ่งให้นักเรียนกี่คน (5 คน)
- แบ่งให้คนละเท่า ๆ กัน นักเรียนจะได้ดินสอ คนละกี่แท่ง หากคำตอบได้อย่างไร

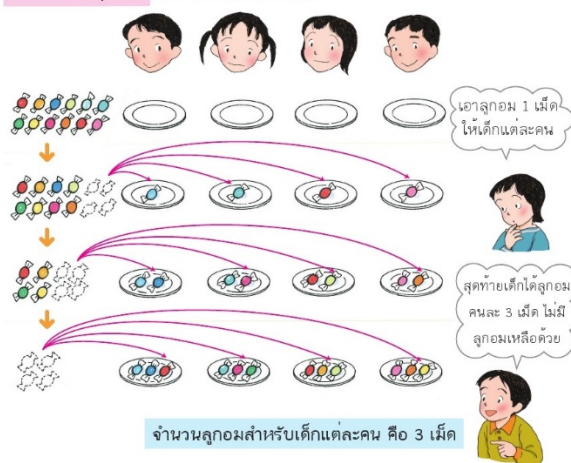
(หากคำตอบโดยการหาร) – เขียนประโยคสัญลักษณ์การหารได้อย่างไร ($30 \div 5 =$)

จากประโยคสัญลักษณ์ครูอธิบายเพิ่มเติมว่าการหาผลหารสามารถหาโดยใช้ความสัมพันธ์ของการคูณและการหาร จากนั้นครูเขียน $5 \times \quad = 30$ บนกระดาน แล้วครูให้นักเรียนพิจารณาร่วมกันว่า 5 คูณจำนวนใดได้ 30 ($5 \times 6 = 30$) จากนั้นครูแนะนำว่าเนื่องจาก $5 \times 6 = 30$ จะได้ $30 \div 5 = 6$ ดังนั้นนักเรียนจะได้ดินสอคนละ 6 แท่ง

ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น (2553) ได้กล่าวในหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เรื่อง การหาร ไว้ดังต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดจำนวนกลุ่มให้หาจำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่ม เช่น แบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมคนละกี่เม็ด

พวกเขาแบ่งลูกอมทั้งหมด 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน
คนละเท่าๆ กัน ดังภาพด้านล่างนี้



ภาพที่ 7 แสดงการหารแบบหาจำนวนสิ่งของสำหรับหนึ่งกลุ่ม จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้น
ประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

สถานการณ์ปัญหาที่กำหนดจำนวนในแต่ละกลุ่ม เพื่อหาจำนวนกลุ่ม เช่น มีลูกกี้ 12 ชิ้น
ถ้าแบ่งลูกกี้ครั้งละ 4 ชิ้นให้เด็กแต่ละคน จะมีเด็กที่ได้รับลูกกี้กี่คน และการอธิบายความหมายของ
ประโยคสัญลักษณ์การหาร



ภาพที่ 8 แสดงการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3
เล่ม 2 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

การอธิบายกระบวนการหาผลลัพธ์การหารจากการใช้ตารางสูตรคูณ จากตัวอย่างของ $15 \div 3$ ซึ่งใช้ตารางแม่สูตรคูณ เพื่อหาจำนวนที่นำมาคูณกับตัวหารแล้วจะได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้งหาร



คำตอบของ $15 \div 3$ คือจำนวนของ
 $\square$ จาก $3 \times \square = 15$ เราสามารถหา
 คำตอบของ $15 \div 3$ จากการใช้แถว
 ของ 3 ในตารางสูตรคูณ

ภาพที่ 9 แสดงการหาผลหารจากตารางสูตรคูณ จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

สถานการณ์การหารที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเดียวกันยกเว้น 0 สถานการณ์การหารที่ตัวตั้งหารเป็น 0 และสถานการณ์การหารด้วย 1

2 การหารด้วย 1 หรือ 0

1 แบ่งคุกกี้ให้เด็ก 4 คน คนละเท่าๆ กัน
 เด็กแต่ละคนจะได้คุกกี้คนละเท่าไร

① เมื่อมีคุกกี้ 12 ชิ้น

12 $\div$ 4

② เมื่อมีคุกกี้ 4 ชิ้น

4 $\div$ 4

③ เมื่อไม่มีคุกกี้

0 $\div$ 4

2 มีน้ำส้ม 6dl ถ้าเทน้ำส้ม 1dl ลงในแก้วแต่ละใบ
 จะต้องใช้แก้วกี่ใบ

6 $\div$ 1

① 6 $\div$ 6 ② 9 $\div$ 9 ③ 7 $\div$ 7 ④ 0 $\div$ 5 ⑤ 0 $\div$ 8
 ⑥ 3 $\div$ 1 ⑦ 5 $\div$ 1 ⑧ 1 $\div$ 1 ⑨ 8 $\div$ 1 ⑩ 0 $\div$ 1

ภาพที่ 10 แสดงสถานการณ์การหารที่ตัวตั้งและตัวหารเป็นจำนวนเดียวกัน ตัวตั้งหารเป็น 0 และตัวหารเป็น 1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กิตติศักดิ์ ใจอ่อน และ กตัญญูตา บางโท (2563) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องพื้นที่ โดยใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยมีกลุ่มเป้าหมายที่ศึกษา คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 28 คน โรงเรียนวัดทุ่งแย้ อ.เมือง จ.นครศรีธรรมราช โดยทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้กรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์ 7 ประเภท คือ 1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต นักเรียนมีการระบุกลุ่มโดยมีเงื่อนไขที่ชัดเจนในการพิจารณาพื้นที่ที่กำหนดให้ 2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย นักเรียนให้ความสำคัญกับขนาดและความสัมพันธ์ 3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน นักเรียนใช้สัญลักษณ์เป็นตัวแทนความคิดของตนเอง 4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ นักเรียนระบุวิธีการแก้ปัญหาโดยดำเนินการหาพื้นที่ เช่น การใช้การบวก การคูณ และการพิจารณาตารางที่ใช้เป็นหน่วยในการหาพื้นที่ 5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ นักเรียนพยายามที่จะสร้างสูตรการหาพื้นที่ 6) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน นักเรียนใช้สมบัติที่เกี่ยวข้องมาอธิบาย และ 7) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด นักเรียนใช้การพูดเพื่อแสดงแนวทางการแก้ปัญหาและการเขียนเพื่ออธิบายแนวคิดการแก้ปัญหา

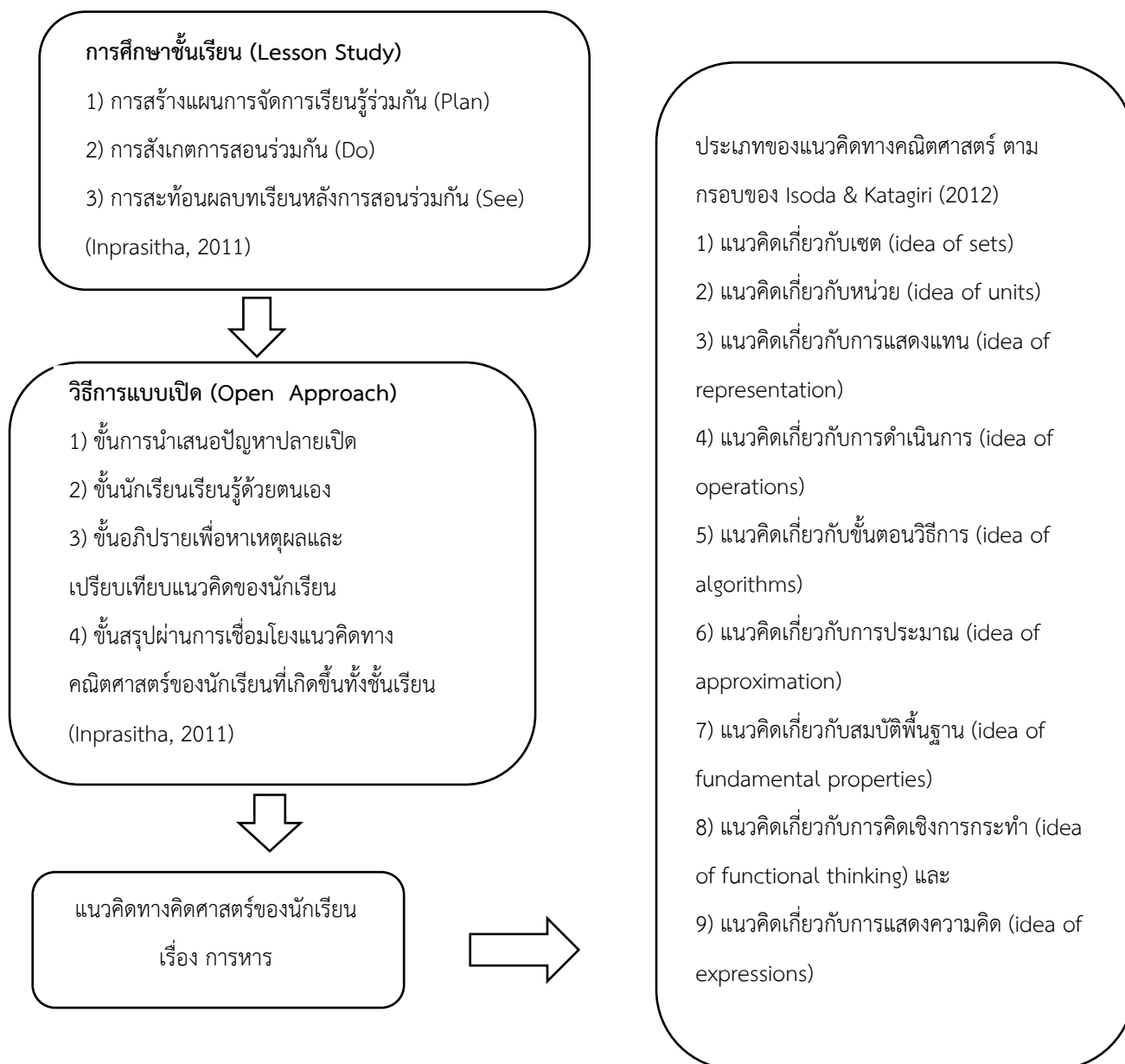
เอมมิกา จันทะดวง (2558) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด โรงเรียนสารคามพิทยาคม อำเภอเมืองมหาสารคาม จังหวัดมหาสารคาม เพื่อสำรวจการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับวิธีการ (Method) ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ผลวิจัยพบว่า จากวิธีการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด มีทั้งหมด 10 ประเภท จาก 11 ประเภท ดังนี้ (1) การคิดเชิงอุปนัย นักเรียนแสดงกระบวนการของการคิดเชิงอุปนัยได้ทั้งหมด 4 กระบวนการ ดังต่อไปนี้ 1) รวบรวมความสัมพันธ์ของมุมกับด้านตรงข้ามมุมทั้งสามกรณี ที่เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหา 2) พิจารณาความสัมพันธ์ของมุมกับด้านตรงข้ามมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ได้จากการแก้ปัญหา 3) สร้างสมการ

และแก้สมการจนสามารถค้นพบกฎของไซน์ 4) ตรวจสอบความถูกต้องกฎของไซน์ด้วยการแทนค่าตัวแปรย้อนกลับ (2) การคิดเชิงอุปมา นักเรียนนำวิธีการในการแก้ปัญหาที่นักเรียนเห็นว่าวิธีแก้ปัญหาที่คล้าย ๆ กันมาช่วยในการแก้ปัญหาอีกปัญหาหนึ่ง (3) การคิดเชิงนิรนัย นักเรียนนำความรู้ที่เคยรู้มาแล้ว เช่น ข้อสรุปของความสัมพันธ์ของกรณีที่ 1 มาช่วยในการอธิบายกรณีที่ 2 และนักเรียนอธิบายพื้นฐานของการคำนวณเลขยกกำลังหรือกำลังสองสมบูรณ์ (4) การคิดเชิงบูรณาการ นักเรียนแบ่งขนาดของมุมและความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมใด ๆ และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานออกเป็นส่วนย่อย ๆ ซึ่งแต่ละส่วนนั้นยังคง มีความเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน (5) การคิดเชิงพัฒนา นักเรียนแสดงให้เห็นว่า สามารถหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้หลากหลายวิธีแต่ผลลัพธ์ของคำตอบที่ได้นั้นยังคงมีค่าเท่าเดิม เช่น นักเรียนสามารถแสดงวิธีการในการหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยอัตราส่วนตรีโกณมิติ และยังสามารถหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยทฤษฎีพีทาโกรัสอีกด้วย (6) การคิดเชิงนามธรรม นักเรียนแสดงให้เห็นว่าการระบุความหมายของตัวแปรในสมการที่นักเรียนได้สร้างให้มีความชัดเจนมากยิ่งขึ้น เพื่อที่จะทำให้สมาชิกภายในกลุ่มมีความเข้าใจที่ตรงกัน (7) การคิดที่ทำได้ง่าย นักเรียนเลือกคำนวณผลลัพธ์ของสมการที่ได้มาจากการสร้างสมการจากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยม โดยนำมาคำนวณทีละกลุ่ม จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้ของแต่ละกลุ่มมาแก้สมการร่วมกันอีกครั้ง (8) การคิดเชิงลักษณะเฉพาะ นักเรียนกำหนดตำแหน่งและขนาดของมุมจากสถานการณ์หนึ่ง แล้วจึงนำสถานการณ์นั้นมาเป็นแนวทางในการกำหนดตำแหน่งและขนาดของมุมที่เหลือ (9) การคิดเชิงสัญลักษณ์ นักเรียนแสดงประโยคสัญลักษณ์แทนข้อความที่กำหนดในสถานการณ์ปัญหา (10) การคิดที่แสดงแทนด้วยจำนวนปริมาณและรูปร่าง นักเรียนสร้างรูปภาพจำลองแทนข้อความที่กำหนดในสถานการณ์ปัญหา

รุ่งทิพา นามารุง (2550) ได้ศึกษาวิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและ การหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี ผลการวิจัยพบว่า 1) เมื่อเสนอโจทย์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยในเรื่อง การคูณ และการหารจำนวนนับให้เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี สามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ตามธรรมชาติ ได้อย่างหลากหลาย โดยนิยมใช้การนับดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมาคือการ บวก/การลบ และการใช้ตัวแบบ ซึ่งอาจใช้การนับจำนวนทั้งหมดจากหนึ่งจนถึงผลรวม วิธีการนับมีทั้ง ใช้การวาดภาพหรือใช้ตัวแบบ ใช้การนับเพิ่มทีละ 1 โดยใช้นิ้วมือช่วยนับ นับเพิ่มทีละ 1 โดยนับออก เสียงจากหนึ่งจนถึงผลรวม หรือนับออก 2) เด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปีมีลักษณะเฉพาะของการคิดเชิง คณิตศาสตร์เป็นของ

ตนเอง ใช้การหยั่งรู้ด้วยตนเอง สามารถแสดงการคิดโดยธรรมชาติของตนเองได้ ทั้งที่เป็นเรื่องที่ไม่คุ้นเคย และยังไม่ได้เรียนมา โดยนำความรู้เชิงสหศาสตร์ ทักษะและการดำเนินการ ทางคณิตศาสตร์ที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนมาทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่แปลกใหม่เพื่อ ค้นหาคำตอบของปัญหาแล้ว สร้างข้อสรุปจากข้อมูลหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ในลักษณะกรณีทั่วไป อย่างไม่เป็นทางการ และพบว่าการ คิดเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กมีทั้งในระดับที่ต่ำจนถึงระดับที่สูง ใน การดำเนินการแก้ปัญหาของเด็กมีทั้งการใช้ตัวแบบในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะที่ใช้ประสบการณ์ตรง และสัมผัสได้ใช้การนับในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อประกอบการนับ และใช้ วิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นระยะของการสร้างสัญลักษณ์

7. กรอบแนวคิดการวิจัย



ภาพที่ 11 แสดงกรอบแนวคิดการวิจัย

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยอาศัย แผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้ปัญหาปลายเปิด เครื่องบันทึกวิดีโอ เครื่องบันทึกภาพนิ่ง วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์ผลงานของนักเรียนและวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และนำเสนอข้อมูลแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analysis Description) เพื่อให้การวิจัยบรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. การนำเสนอผลการวิจัย

โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากร

ประชากร ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียล ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน

1.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียล ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน การคัดเลือกแบบเฉพาะเจาะจง

2. เครื่องมือในการวิจัย

2.1 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1.1 แผนการจัดการเรียนรู้เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่ทีมการศึกษาชั้นเรียนร่วมกันสร้างโดยเน้นการบูรณาการเนื้อหา ทักษะ/กระบวนการ และคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง การหาร ซึ่งอยู่ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ที่ ซึ่งหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง การหาร ผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 13 คาบ โดยผู้วิจัยได้เลือกมา 4 คาบ ในการเก็บข้อมูล

2.1.2 ใบกิจกรรม ใช้สำหรับเก็บข้อมูลงานเขียน การแสดงแนวคิดโดยการอธิบาย การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์ การวาดภาพ การแสดงแนวคิดในรูปแบบต่าง ๆ โดยใบกิจกรรมมีทั้งหมด 4 ใบ กิจกรรม ตามจำนวนแผนการจัดการเรียนรู้

2.1.3 เครื่องมือบันทึกวิธีทัศน์ใช้สำหรับบันทึกภาพเคลื่อนไหว เสียง และภาพนิ่งของนักเรียนที่ดำเนินไปในระหว่างที่นักเรียนมีส่วนร่วมในชั้นเรียนคณิตศาสตร์และการทำกิจกรรมที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติที่การแก้ปัญหาด้วยตนเองและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

2.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

2.2.1 ผลงานของนักเรียน เป็นข้อมูลที่ได้จากการทำใบกิจกรรมของนักเรียน ปรากฏอยู่ในรูปข้อมูลงานเขียน การแสดงแนวคิดโดยการอธิบาย การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์ การวาดภาพ การแสดงแนวคิดในรูปแบบต่าง ๆ โดยผู้วิจัยจะนำข้อมูลงานเขียนของนักเรียนมาวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2.2.2 การวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการบันทึกวิธีทัศน์ในแต่ละครั้ง ทั้งในรูปแบบภาพและเสียงไปวิเคราะห์ถอดคำพูดและพฤติกรรมออกมาในรูปข้อความและจัดทำเป็นโปรโตคอล โดยผู้วิจัยจะนำโปรโตคอลมาวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

3.1 การดำเนินการก่อนการเก็บรวบรวมข้อมูล

3.1.1 ผู้วิจัยทำการศึกษาบริบทของโรงเรียนสภาพแวดล้อมของโรงเรียน หลักสูตรสถานศึกษา จากการวิเคราะห์เอกสารรูปแบบเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ในโรงเรียน พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน พฤติกรรมการสอนของครูตลอดจนวัฒนธรรมของชั้นเรียน ผ่านการสังเกตชั้นเรียน และ

ผู้วิจัยได้สอบถามปัญหาต่าง ๆ ที่พบในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จากครูผู้สอนประจำชั้นประถมศึกษาปีที่ 3

3.1.2 ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ในภาคเรียนที่ 2/2565 และทำการสังเกตพฤติกรรมของกลุ่มเป้าหมายเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลพื้นฐานของกลุ่มเป้าหมายซึ่ง ได้แก่ บุคลิกภาพ ลักษณะนิสัย ความสนใจ พฤติกรรมการแสดงออก พฤติกรรมการแก้ปัญหา และลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์

3.2 การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

3.2.1 ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียล ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดตามแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง การหาร จำนวน 4 แผน 4 ชั่วโมง โดยในระหว่างการเรียนการสอนผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน บันทึกแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน ในขณะที่นักเรียนทำการแก้ปัญหา ผู้วิจัยจะไม่เข้าไปแทรกแซงแนวคิดนักเรียนหาไม่จำเป็น และผู้ช่วยวิจัยบันทึกพฤติกรรมของนักเรียนโดยใช้เครื่องบันทึกวิดีโอที่ติดตั้งบนบันทึกเหตุการณ์ในชั้นเรียนในแต่ละขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด

3.2.2 ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลที่เป็นผลงานจากการทำกิจกรรมของนักเรียน ซึ่งเป็นงานที่นักเรียนได้บันทึกในขณะที่ลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากใบกิจกรรม บันทึกเกี่ยวกับวิธีการหาคำตอบและเหตุผลประกอบการหาคำตอบของนักเรียน และข้อมูลที่ได้จากการบันทึกวิดีโอที่ติดตั้งมาถอดคำพูดและพฤติกรรมจัดทำเป็นโพโตคอลเพื่อใช้เป็นประกอบการวิเคราะห์ข้อมูล

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์จากโพโตคอลของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด และผลงานของนักเรียนจากการทำกิจกรรมการเรียนรู้วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้กรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ซึ่งได้จำแนกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งหมด 9 แนวคิด ดังนี้

- 1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets)

- 2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (idea of units)
- 3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (idea of representation)
- 4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (idea of operations)
- 5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (idea of algorithms)
- 6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ (idea of approximation)
- 7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (idea of fundamental properties)
- 8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking)
- 9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions)

6. การนำเสนอผลการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยจะนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลในรูปแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Descriptive) เป็นการบรรยายเพื่อให้เห็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยนำข้อมูลที่ได้มาสรุปเป็นความเรียงประกอบกับ ภาพถ่ายผลงานแนวคิดนักเรียนและโพรโทคอลจากการทำกิจกรรม นำมาวิเคราะห์แนวคิดของนักเรียน โดยเรียงลำดับตามกรอบการวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ตั้งแต่ แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ถึงแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 โดยนำข้อมูลจากงานเขียนของนักเรียน ภาพถ่าย ผลงานนักเรียน โพรโทคอลของชั้นเรียน แบบบันทึกหลังการสอน แบบสังเกตการจัดการเรียนรู้ ซึ่งผู้วิจัย ได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังต่อไปนี้

- 1) การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) โดยนำเสนอเป็นภาพถ่ายผลงานของนักเรียนและบรรยายสรุปผล
- 2) การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) โดยนำเสนอเป็นโพรโทคอลและบรรยายสรุปผล
- 3) ตารางสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร

ประเภทของแนวคิดทาง คณิตศาสตร์ตามกรอบแนวคิด ของ Isoda & Katagiri (2012)	การวิเคราะห์แนวคิดทาง คณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นภาพถ่าย ผลงาน ของนักเรียน				การวิเคราะห์แนวคิดทาง คณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นโพรโทคอล			
	แผนการจัดการเรียนรู้ที่				แผนการจัดการเรียนรู้ที่			
	1	2	3	4	1	2	3	4
แนวคิดเกี่ยวกับเซต								
แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย								
แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน								
แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ								
แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ								
แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ								
แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน								
แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงกา กระทำ								
แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง ความคิด								

ตารางที่ 3 แสดงสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การคูณ

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ใน ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาค้นเรียนและวิธีการแบบเปิด กลุ่มเป้าหมายคือ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนโรงเรียนเซนต์คาเบรียลภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน ดำเนินการวิจัยโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ โดย เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การหาร จำนวน 4 แผน เครื่องบันทึกวีดิทัศน์ และบันทึกภาพนิ่งจากวีดิทัศน์ วิเคราะห์ข้อมูลจากผลงานของนักเรียนและโปรโตคอลของชั้นเรียน (Protocol Analysis) โดยวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียน เรื่อง หาร ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012)

ผู้วิจัยนำเสนอข้อมูลแบบการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analysis Description) ตามลำดับของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) โดยรายละเอียดของผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการอภิปรายผลแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องการหาร มีโครงสร้างดังต่อไปนี้

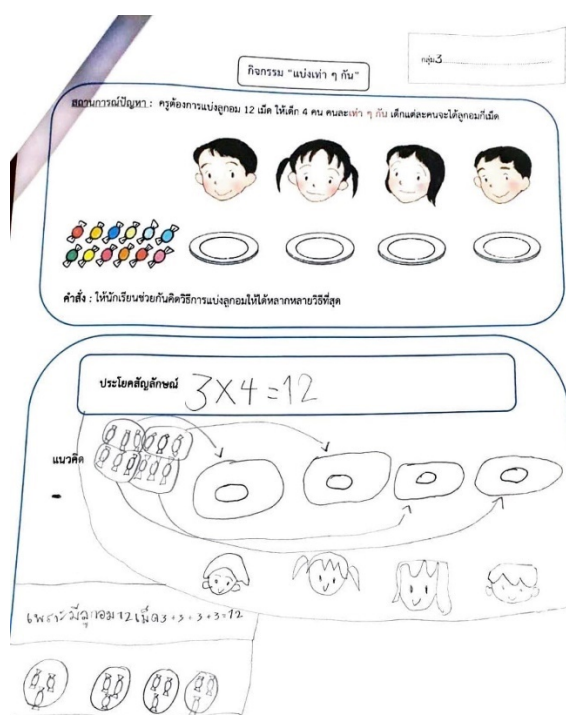
1. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นภาพถ่าย ผลงานของนักเรียน
2. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นโปรโตคอล
3. สรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ทั้ง 9 แนวคิด โดยนำเสนอในรูปแบบตาราง โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นภาพถ่ายผลงานของนักเรียน

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

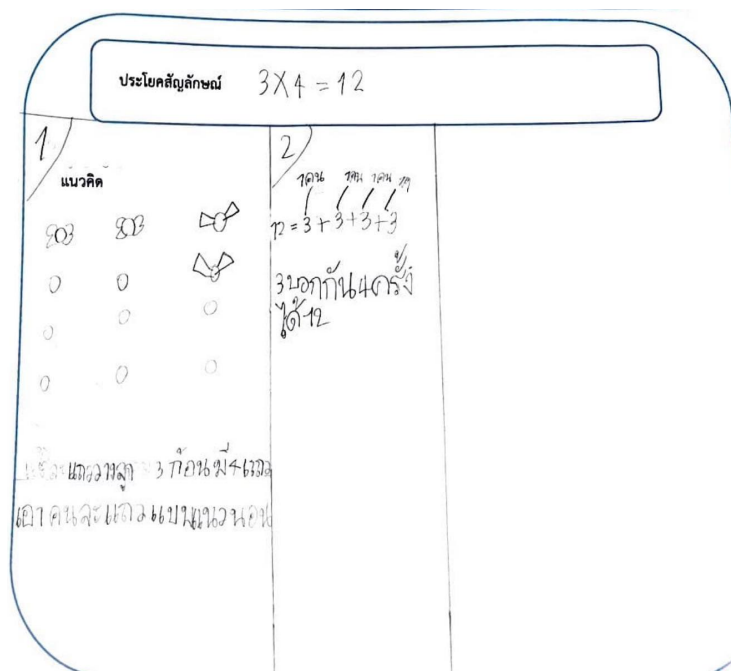
(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 12 แสดงผลงานของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยพิจารณาตามเงื่อนไขที่ต้องแบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน นักเรียนจึงทำการจัดกลุ่มของลูกอมเป็น 4 กลุ่ม ตามจำนวนเด็กแล้วทำการโยงกลุ่มลูกอมเชื่อมกับงานที่แสดงแทนเด็ก และนักเรียนได้ให้เหตุผลสนับสนุนว่าเพราะมีลูกอม 12 เม็ด $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

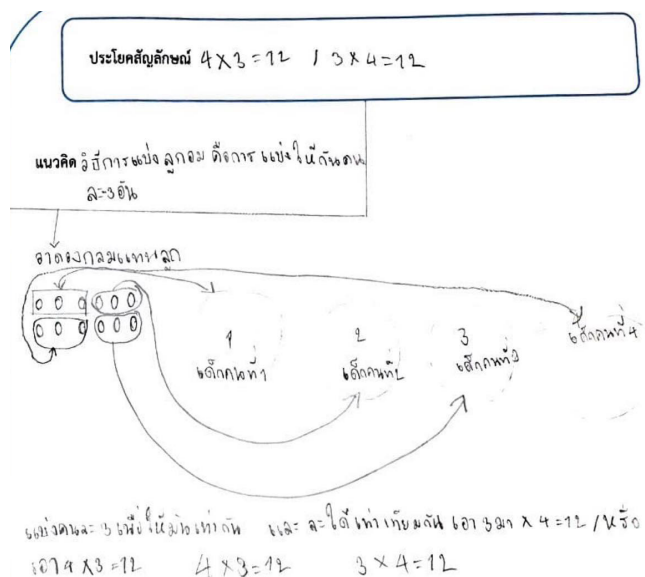
(2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (idea of units) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยปรากฏโดยการ จัดการ เรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 13 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย

แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ทำการแบ่งลูกอมโดยการวาดภาพก่อนตามวิธีที่ 1 จากนั้นวิธีที่ 2 นักเรียนได้นำจำนวนลูกอมทั้งหมด ตั้งแล้วเท่ากับจำนวนที่แบ่ง $12 = 3 + 3 + 3 + 3$ เพื่อแสดงการตรวจสอบการแบ่งลูกอมและดำเนินการแสดงแทนตัวเลขแต่ละตัวด้วยหน่วยต่อ 1 คน

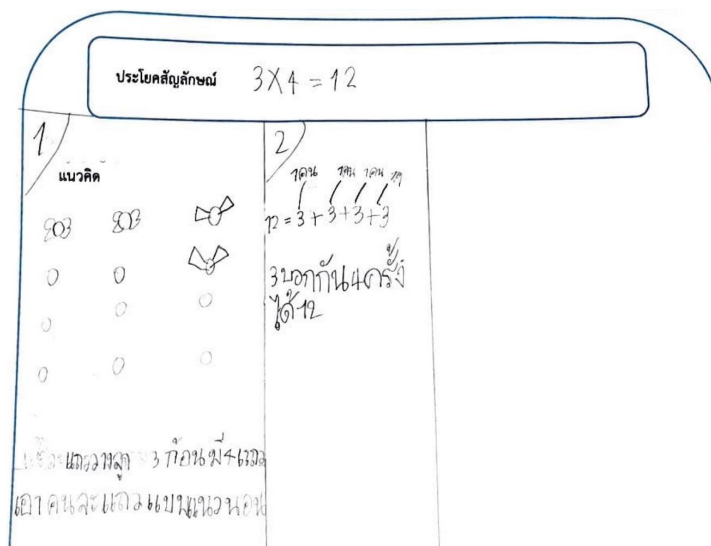
(3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (Idea of representation) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 14 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ หลังจากนักเรียนทำการจัดกลุ่มและโยงเส้นหาเด็กจำนวน 4 คนแล้วนักเรียนได้ทำการสรุปว่าแบ่งให้คนละ 3 เม็ดเพื่อที่จะให้จำนวนลูกอมที่เด็กแต่ละคนได้เท่ากัน แล้วเขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณแสดงแทนการหาผลลัพธ์คือ $3 \times 4 = 12$ หรือ $4 \times 3 = 12$ โดย 3 แทนด้วยจำนวนลูกอมที่เด็กแต่ละคนจะได้รับ 4 คือจำนวนเด็ก และ 12 คือจำนวนลูกอมทั้งหมดที่ดำเนินการแบ่ง

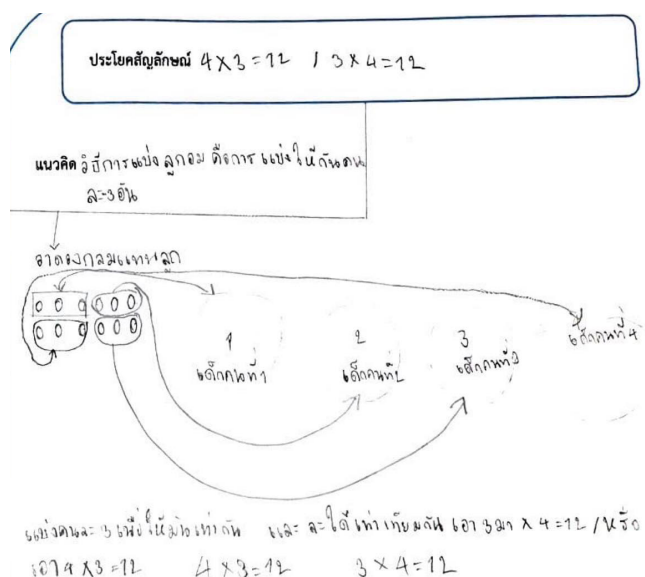
(4) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 15 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยวาดภาพเพื่อแสดงแทนถึงลูกอมแล้วทำการจัดเรียงเป็นแถวแนวนอน แถวละ 3 เม็ด จำนวน 4 แถว จะได้นักเรียนดำเนินการหาผลลัพธ์บนพื้นฐานเข้าใจของตนเองจากการจัดเรียงลูกอมใหม่

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



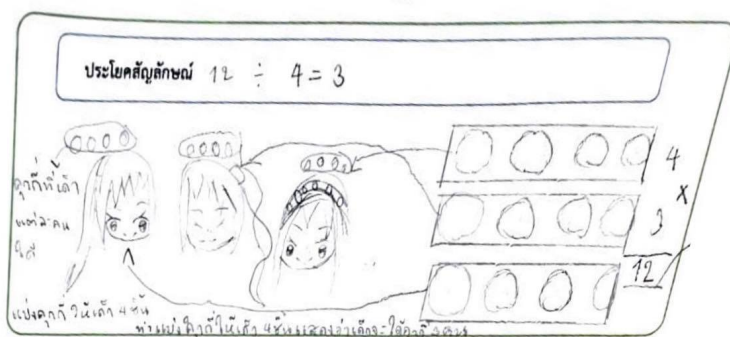
ภาพที่ 16 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนพยายามที่จะเขียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหา เหตุผลของการแก้ปัญหา และความหมายของการแก้ปัญหา โดยนักเรียนได้อธิบายให้เห็นถึงที่มาและเหตุผลของการคำนวณ จากการจัดกลุ่มและโยงเส้นเชื่อมกับจำนวนเด็ก ซึ่งนักเรียนได้เขียนแสดงความคิดว่าแบ่งให้เด็กคนละ 3 เพื่อให้เท่ากันและนำ 3 มาดำเนินการคูณกับ 4 เท่ากับ 12 แล้วนักเรียนทำการเขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณ คือ $4 \times 3 = 12$ และ $3 \times 4 = 12$

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 17 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ทำการจัดกลุ่มของลูกพี่ใหม่เป็นกลุ่มละ 4 ชั้นเพื่อพิจารณาในการแก้ปัญหาตามเงื่อนไข จากนั้นได้ดำเนินการเชื่อมโยงด้วยเส้นระหว่างกลุ่มของจำนวนลูกพี่ที่เด็กแต่ละคนจะได้รับกับจำนวนเด็กที่นักเรียนได้ทำการวาดภาพขึ้นมา

(2) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (Idea of representation) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้

ประโยคสัญลักษณ์ $12 \div 4 = 3$

$3 \times 4 = 12$ เด็ก

แบ่งให้เด็ก 3 คน ละละ เท่าเท่ากัน

แต่ละ 4 จะได้เท่ากัน

เด็ก 3 คน ละละ 4

ภาพที่ 18 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการคูณและเขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณ $3 \times 4 = 12$ ซึ่ง 3 แสดงแทนจำนวนของเด็กหรือผลลัพธ์ที่โจทย์ต้องการ 4 แทนจำนวนลูกกอล์ฟที่เด็กแต่ละคนได้รับ และ 12 คือจำนวนลูกกอล์ฟทั้งหมด จากการดำเนินการแก้ปัญหานักเรียนจึงได้ประโยคสัญลักษณ์การหารคือ $12 \div 4 = 3$

(3) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้

ประโยคสัญลักษณ์ $3 : 4 = 12$

$12 = 4 + 4 + 4$

4 8 12

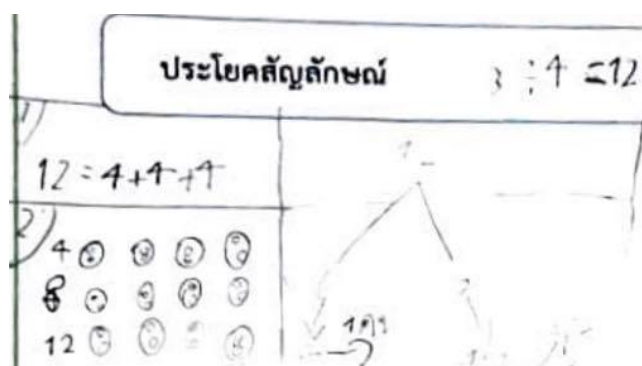
ได้ 3 คน

ภาพที่ 19 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาโดยการแยกจำนวนลูกกอล์ฟ 12 ชิ้นออก โดยการ

แยกครั้งแรกเป็นการแบ่งออกเป็นจำนวนครึ่งหนึ่งของคุกกี้ทั้งหมด จึงได้ 6 สองกลุ่ม จากนั้นนักเรียนทำการแบ่งครึ่งที่สองโดยการแบ่ง 4 ออกจาก 6 ทั้งสองกลุ่มจากเงื่อนไขของโจทย์ที่ต้องการแบ่งคุกกี้จำนวน 4 ชิ้น จึงได้ 4 สองกลุ่ม แล้วทำเครื่องหมายลูกศรเพื่อแสดงว่า 4 คือจำนวนคุกกี้ต่อเด็ก 1 คน จากการแบ่งครึ่งที่สองทำให้เหลือ 2 จาก 6 นักเรียนทำเครื่องหมายลูกศรเพื่อแสดงว่า 2 คือเศษตามความเข้าใจของนักเรียน นักเรียนจึงทำการรวมเศษ 2 จาก 6 ทั้งสองกลุ่มเป็น 4 แล้วทำเครื่องหมายลูกศรเพื่อแสดงว่า 4 คือจำนวนคุกกี้ต่อเด็ก 1 คน ของคนที่ 3 จะเห็นได้นักเรียนได้ทำการดำเนินการตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์ของสถานการณ์ปัญหาการหารโดยการแยกตัวเลขออกจากจำนวนของคุกกี้ทั้งหมดจนกระทั่งได้ผลลัพธ์ตามเงื่อนไขที่โจทย์ต้องการ

(4) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (Idea of fundamental properties) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 20 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ทำการจัดกลุ่มของจำนวนคุกกี้เป็นแถว โดยแต่ละแถวจะมีคุกกี้ 4 ชิ้นตามจำนวนเด็กแต่ละคนจะได้รับ จากนั้นนักเรียนได้ทำการเพิ่มแถวจนกระทั่งจำนวนคุกกี้ทั้งหมดครบ 12 ขึ้นตามที่โจทย์ได้กำหนด จะเห็นได้ว่านักเรียนได้นำกฎพื้นฐานของการคูณที่เพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กันที่นักเรียนได้เรียนรู้จากภาคเรียนที่ 1 นำมาใช้ในการแก้ไขปัญหาการหาร

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้

ประโยคสัญลักษณ์ $12 \div 4 = 3$

$3 \times 4 = 12$

แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน คนละ 4

เด็ก 4 คนได้เท่ากัน

เด็ก 4 คนได้เท่ากัน

ภาพที่ 21 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนพยายามที่จะเขียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหา เหตุผลของการแก้ปัญหา และความหมายของการแก้ปัญหา นักเรียนได้อธิบายให้เห็นถึงที่มา และเหตุผลของการคำนวณ ซึ่งนักเรียนได้เขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณ $3 \times 4 = 12$ พร้อมกับวาดภาพประกอบ โดยนักเรียนเขียนอธิบายว่าแบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน คนละ 4

1.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (Idea of operation) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกับภาพ

ปริมาณของนมในกล่องครึ่ง

ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$

หุ่ยมี 5 กล่อง คนในใจ

$6 \times 5 = 30$

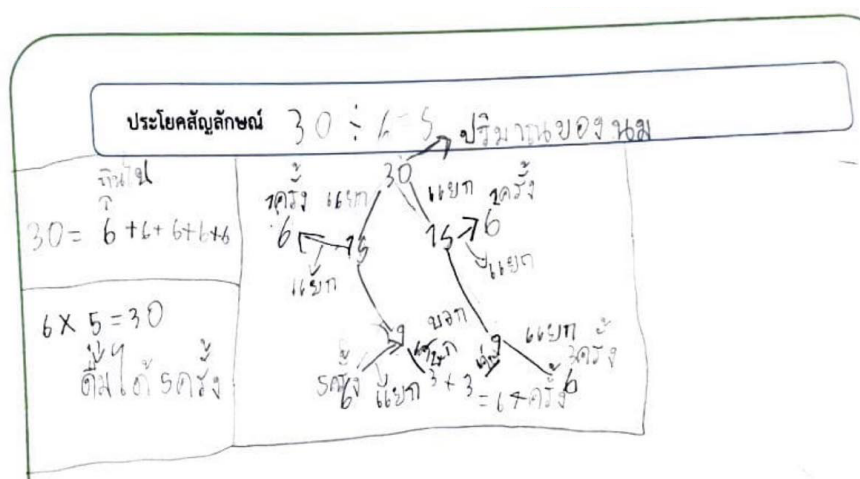
ใช้การคูณมาช่วย

ตอบ $= 5$

ภาพที่ 22 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับการดำเนินการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ดำเนินการแก้ปัญหาบนพื้นฐานการนับ ใช้การเครื่องหมายประกอบการต็มนมครั้งละ 6 เดซิลิตร จนต็มครบทั้งหมด 30 เดซิลิตร และนักเรียนได้ทำการนับจำนวนครั้งที่ทำเครื่องหมายสำหรับการต็มนมแต่ละครั้งจนสามารถสรุปได้ว่าต็มนมไปทั้งหมด 5 ครั้ง

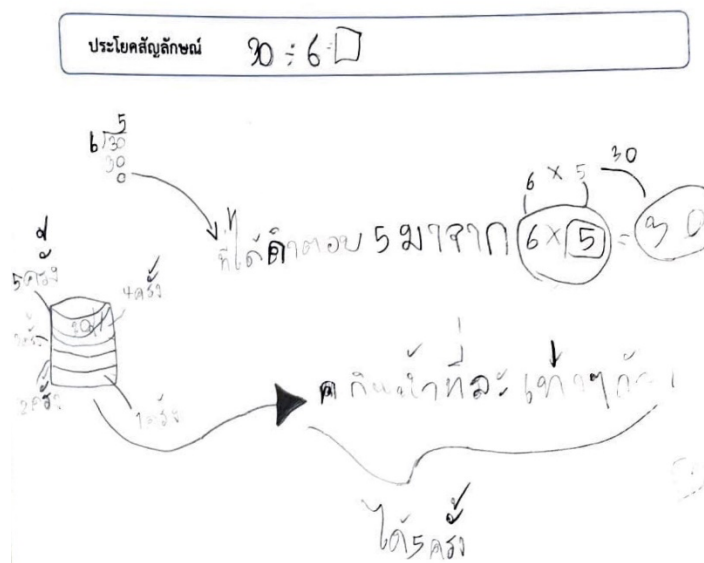
(2) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 23 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ วิธีที่ 1 นักเรียนได้ทำการเขียนประโยคสัญลักษณ์ $30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ และให้เหตุผลว่า 6 หมายถึงปริมาณนมที่ต็มในแต่ละครั้ง วิธีที่ 2 นักเรียนได้ทำการใช้ประโยคสัญลักษณ์การคูณเพื่อดำเนินการหาผลลัพธ์ ซึ่งได้ $6 \times 5 = 30$ และอธิบายว่า 5 หมายถึงจำนวนครั้งในการต็มนม และวิธีที่ 3 นักเรียนได้ทำการแยกปริมาณนมทั้งหมดคือ 30 เดซิลิตร โดยนักเรียนได้ทำการแยกออกเป็น 15 สองกลุ่ม จากนั้นได้ทำการแยก 6 ออกจาก 15 ทั้งสองกลุ่ม ซึ่งหมายถึงปริมาณน้ำนมที่ต็มครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 ดังนั้นปริมาณนมที่เหลือคือ 9 สองกลุ่ม แล้วนักเรียนได้ทำการแยก 6 ออกจาก 9 ทั้งสองกลุ่ม จึงเป็นการต็มนมครั้งที่ 3 และครั้งที่ 4 ส่วน 3 ที่เหลือจากการแยก 6 ออกจาก 9 ทั้งสองกลุ่มนักเรียนอธิบายว่ามันคือเศษ จากนั้นนักเรียนทำการนำเศษ 3 ทั้งสองกลุ่มมารวมกันเป็น 6 จึงได้อธิบายว่าเป็นการต็มนมครั้งที่ 5

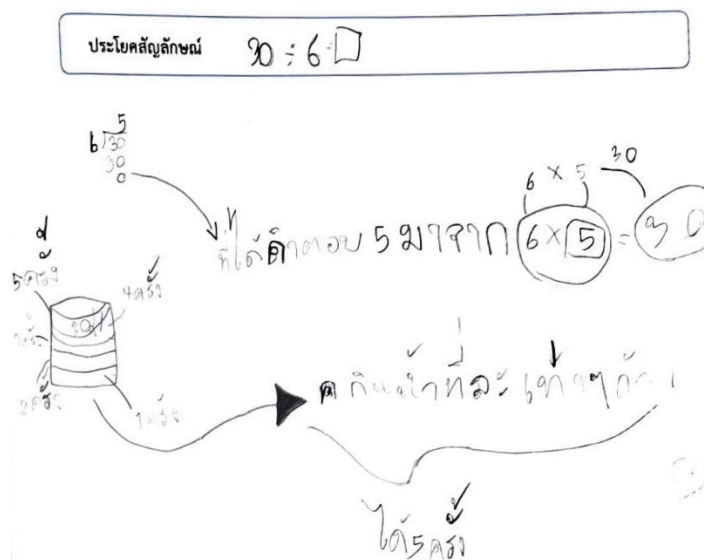
(3) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (Idea of functional thinking) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 24 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้พยายามจะหาผลลัพธ์จากเงื่อนไขที่กำหนดมาให้คือ มีนมอยู่ 30 dl ถ้าดื่มไปครั้งละ 6 dl จะดื่มหมดได้กี่ครั้งซึ่งนักเรียนได้ใช้ประโยคสัญลักษณ์การคูณ $6 \times 5 = 30$ โดยนักเรียนได้ทำการหาความสัมพันธ์ของตัวเลขที่คูณกับ 6 แล้วจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 30 นั่นก็คือ 5

(4) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



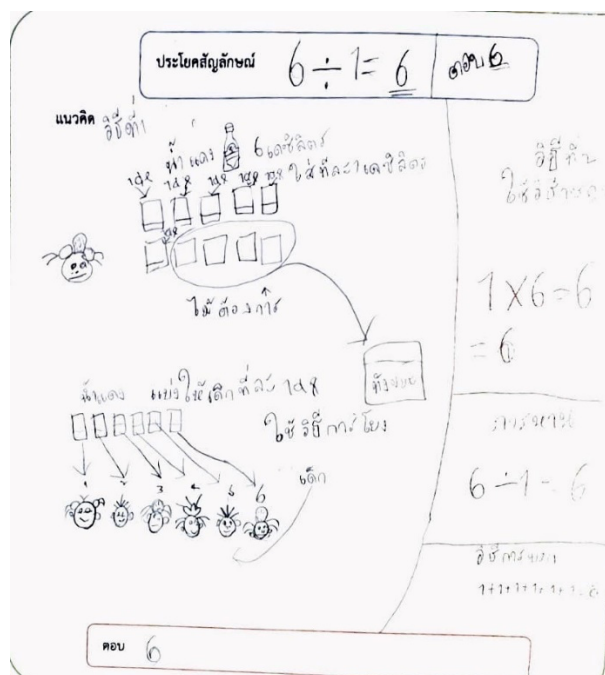
ภาพที่ 25 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนเขียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาและความหมายของการแก้ปัญหา นักเรียนได้อธิบายให้เห็นถึงที่มาเริ่มจากการวาดภาพแสดงการตักน้ำครึ่งละ 6 เดซิลิตรแต่ละครั้งจนกระทั่งครบ 30 เดซิลิตร และให้เหตุผลอธิบายว่าตักน้ำครึ่งละเท่า ๆ กัน จากนั้นนักเรียนได้เขียนถึงที่มาของผลลัพธ์โดยใช้การคูณ ดังที่ได้เห็นจากประโยคสัญลักษณ์ $6 \times 5 = 30$

1.4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

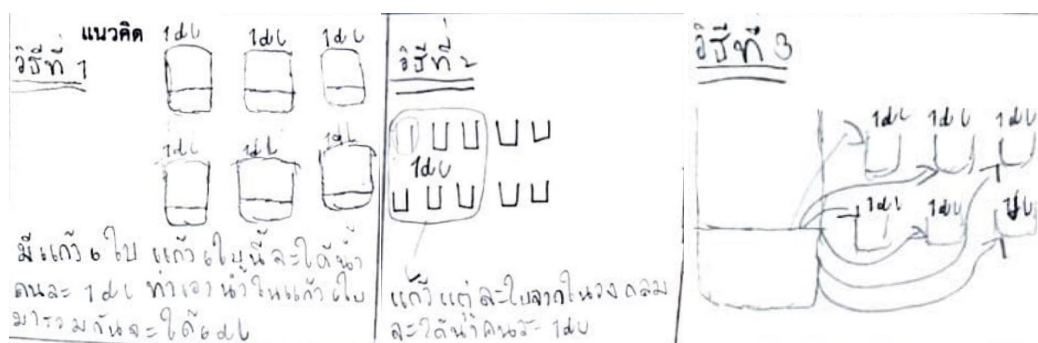
(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (Idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 26 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับเซต

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาและสื่อเสริมประกอบด้วยแก้วจำนวน 10 ใบที่กำหนดให้ จากวิธีที่ 1 นักเรียนได้ทำการจัดหมวดหมู่ของจำนวนแก้วที่จะใช้ในการพิจารณาเพื่อแก้ปัญหา โดยนักเรียนได้จัดกลุ่มแก้วจำนวน 6 ใบที่ต้องการ ส่วนอีก 4 ใบที่เหลือนักเรียนเขียนอธิบายว่าไม่ต้องการ จากนั้นนักเรียนได้ทำการดำเนินการเขียนปริมาณน้ำกำกับแก้วแต่ละใบ 1 เดซิลิตรตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในกลุ่มของแก้ว 6 ใบที่นักเรียนได้พิจารณา

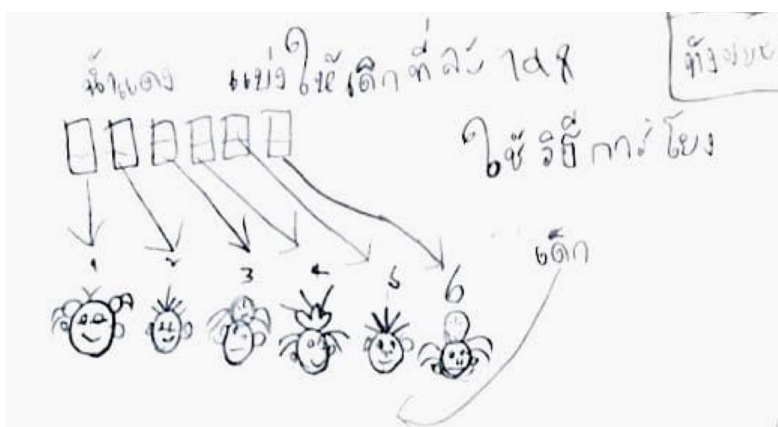
(2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (Idea of units) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 27 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาจากการพิจารณาปริมาณน้ำแดงทั้งหมด 6 เดซิลิตรและจำนวนแก้ว 10 ใบ ซึ่งนักเรียนได้ทำการเขียนปริมาณน้ำ 1 เดซิลิตร จากการเทแต่ละครั้งต่อแก้ว 1 ใบ จนกระทั่งได้ข้อสรุปตามความเข้าใจของนักเรียนได้ว่า แก้ว 6 ใบจะได้น้ำแก้วละ 1 เดซิลิตร ถ้านำน้ำในแก้วทั้ง 6 ใบมารวมกันจะได้ 1 เดซิลิตร

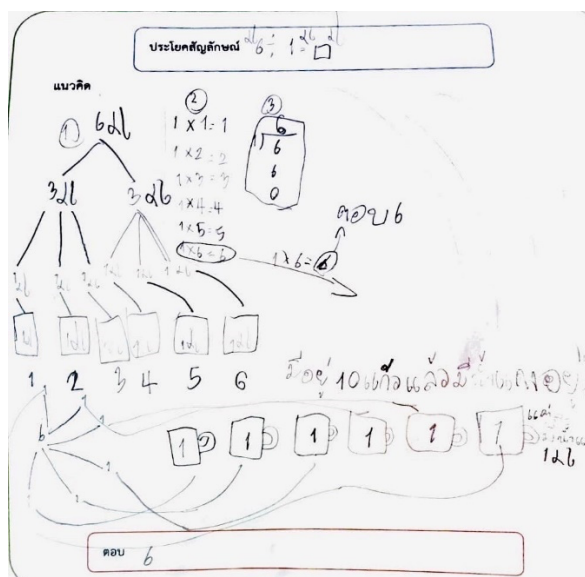
(3) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (Idea of operation) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 28 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยนักเรียนได้ทำการวาดภาพแก้วน้ำที่จะเทน้ำแดงใส่จำนวน 6 ใบ พร้อมอธิบายว่าแบ่งให้เด็กคนละ 1 เดซิลิตร ตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาที่เทน้ำแดงครั้งละ 1 เดซิลิตร แล้วทำการโยงเชื่อมระหว่างจำนวนแก้วที่บรรจุน้ำแดงและเด็กจากภาพที่นักเรียนได้สร้างขึ้น โดยได้เขียนหมายเลขกำกับกับจำนวนเด็ก

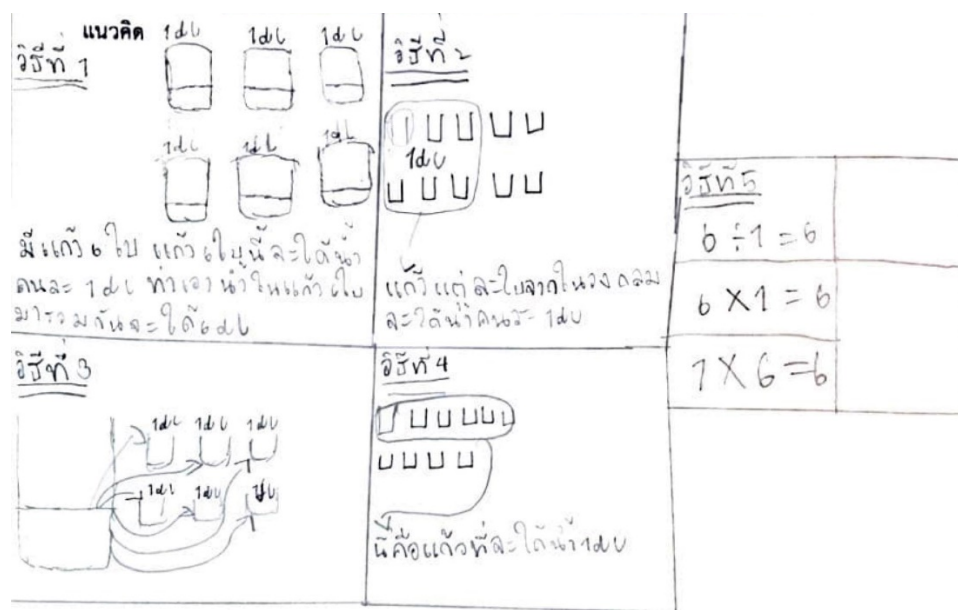
(4) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 29 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ จากวิธีที่ 1 นักเรียนได้ทำการแยกปริมาณน้ำแดงทั้งหมด 6 เดซิลิตรครั้งที่ 1 ออกเป็นสองกลุ่มคือ 3 เดซิลิตรและ 3 เดซิลิตร จากนั้นนักเรียนทำการแยกครั้งที่ 2 จากการแยก 3 เดซิลิตรของทั้งสองกลุ่มออกเป็น 1 เดซิลิตร จะได้น้ำแดง 1 เดซิลิตร 6 กลุ่ม จากนั้นนักเรียนได้ทำการโยงปริมาณน้ำ 1 เดซิลิตรที่เกิดจากการแยกกับแก้วที่นักเรียนได้สร้างขึ้น ส่วนวิธีที่ 2 นักเรียนได้ทำการแยกปริมาณน้ำทั้งหมดคือ 6 จากการโยงเส้นออกเป็น 1 จำนวน 6 กลุ่ม จากนั้นได้ทำการโยง 1 แต่ละกลุ่มกับแก้วน้ำที่นักเรียนสร้างขึ้น พร้อมกับเขียนเลข 1 ซึ่งหมายถึงปริมาณน้ำในแต่ละแก้วกำกับ และอธิบายว่าแต่ละแก้วมีน้ำแดง 1 เดซิลิตร

(5) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (Idea of fundamental properties) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 30 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน

แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยวิธีที่ 5 นักเรียนได้นำความรู้จากการคูณมาใช้ในการแก้ปัญหาจึงได้ประโยชน์สัญลักษณ์การคูณสองแบบคือ $6 \times 1 = 6$ และ $1 \times 6 = 6$ ซึ่งเป็นความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนจากภาคเรียนที่ 1 คือ สมบัติสลับที่การคูณ จากนั้นนักเรียนจึงได้ผลลัพธ์ว่า $6 \div 1 = 6$ ดังนั้นนักเรียนสามารถแสดงสมบัติการหารด้วย 1 บนพื้นฐานแนวคิดและความเข้าใจของนักเรียน

(6) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (Idea of functional thinking) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้

②

$$1 \times 1 = 1$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$1 \times 4 = 4$$

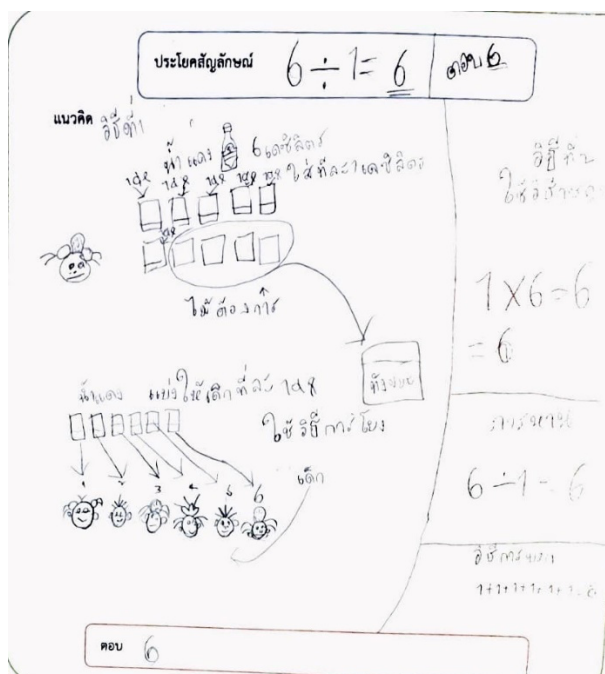
$$1 \times 5 = 5$$

$$1 \times 6 = 6$$

ภาพที่ 31 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนได้ใช้ตารางการคูณ ซึ่งนักเรียนได้ทำการเปลี่ยนตัวคูณ แล้วสังเกตความสัมพันธ์ของตัวคูณกับผลลัพธ์ จนกระทั่งพบว่า $1 \times 6 = 6$ นักเรียนจึงได้นำประโยคสัญลักษณ์นี้มาใช้เพื่อดำเนินการหาผลลัพธ์ของสถานการณ์ปัญหา

(7) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 32 ของนักเรียนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 ประเภทแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด

แนวคิดเกี่ยวกับเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนเขียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาและที่มาของการแก้ปัญหา โดยนักเรียนได้แสดงความคิดในการหาผลลัพธ์ด้วยการจัดกลุ่มเพื่อพิจารณาการคำนวณ จะเห็นได้จากการที่นักเรียนเลือกแก้วที่ไม่ต้องการออกจำนวน 4 แก้ว ต่อมานักเรียนได้ทำการโยงจำนวนแก้วกับภาพเด็กที่นักเรียนได้วาดไว้ พร้อมกับอธิบายว่าแบ่งให้เด็กคนละ 1 เดซิลิตร จะได้นักเรียนได้ดำเนินการแสดงความสัมพันธ์และเชื่อมโยงวิธีการแก้ปัญหาขึ้นเบื้องแรกของสถานการณ์ปัญหา

2. การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนำเสนอเป็นโปรโตคอล

2.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 41	T	กลุ่ม 4 หนูแบ่งลูกอมยังไง
ITEM 42	S1	แบ่งคนละ 3 เม็ด
ITEM 43	T	หนูแทนลูกอมเป็นวงกลมไข่ม้อย เพื่อนวาดรูปแบบ วาดแบบนี้แทนอะไร
ITEM 44	S1	ลูกอม
ITEM 45	T	ลูกอมของเพื่อนเป็นอย่างไร จาก 12 อันมาเป็นแบบนี้ ช่วยในการแก้ปัญหาอย่างไร
ITEM 46	S2	เหมือนการใส่จาน

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนพิจารณาเงื่อนไขในการแบ่งจำนวนลูกอมให้เด็กแต่ละคนเท่ากัน โดยนักเรียนได้ทำการจัดกลุ่มของวงกลมออกเป็น 4 กลุ่มตามจำนวนเด็กหรือจาน และแต่ละกลุ่มมีลูกอม 3 ลูกเท่ากัน จะเห็นได้ว่านักเรียนมีการจัดกลุ่มของจำนวนทั้งหมดที่จะแบ่งลูกอมออกเป็นกลุ่มย่อย โดยมีการสร้างเงื่อนไขของกลุ่มตามเงื่อนไขของโจทย์การหาร คือ แบ่งให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน

(2) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (Idea of operation) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 82	S1	เอา 3 บวกกัน 3 ครั้งเท่ากับ 12
ITEM 83	T	ดูเพื่อนแบ่งยังไงดู 12 คืออะไร 12 จากโจทย์คือจำนวนลูกอมที่จะแบ่งไข่ม้อย
ITEM 84	S1	ใช่ค่ะ

ITEM 85	T	แล้วเพื่อนแบ่งยังงี้ $12 = 3 + 3 + 3 + 3$
ITEM 86	S2	ใช่ค่ะ

แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนพิจารณาเงื่อนไขในการแบ่งจำนวนลูกอมให้เด็กแต่ละคนเท่า ๆ กัน นักเรียนใช้วิธีดำเนินการโดยตั้งจำนวนลูกอมทั้งหมดก่อนแล้วทำการแบ่งจำนวนลูกอมเป็นแต่ละกลุ่มย่อย โดยวิธีการบวกของจำนวนลูกอมต่อเด็กหนึ่งคนที่จะได้รับ

(3) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 51	T	แล้วหนูเขียนแนวคิดยังงี้ วาดวงกลมแทนลูกอมไข่ม้อย
ITEM 52	S5	จากภาพในกิจกรรมจะเป็นลูกอมเรียงกัน 6 เม็ด
ITEM 53	T	เริ่มแบบนี้แล้วก็มีจาน แบบนี้ไข่ม้อยคะ แล้วเพื่อนเค้าทำแบบนี้(โยงเส้น)
ITEM 54	T	เพื่อนเค้าทำอะไรก่อน ใส่กลุ่มให้มันก่อนไข่ม้อยคะ ตามเงื่อนไข แล้วโยงใส่จาน
ITEM 55	T	มันเหมือนการคูณไหม?
ITEM 56	S2	เหมือน
ITEM 57	T	4 คืออะไร มาจากไหน ข้างในช่วยเพื่อนหน่อยเร็ว
ITEM 58	S3	4 คือจาน
ITEM 59	T	3 มาจากไหน
ITEM 60	S	มาจากลูกอม

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาด้วยตัวเอง โดยนักเรียนได้ทำการแบ่งกลุ่มให้กับลูกอมให้มีสมาชิกภายในกลุ่มเท่า ๆ กัน โดยการวงกลมล้อมรอบลูกอมเป็นกลุ่มก่อน หลังจากนั้นนักเรียนได้ทำการโยงเส้นแต่กลุ่มที่แบ่งไว้เชื่อมกับจาน จะเห็นได้ว่านักเรียนพยายามแก้ปัญหาเป็นระเบียบแบบแผนจากการแบ่งกลุ่มและเชื่อมโยงกลุ่มเข้ากับจำนวนจานที่นักเรียน 4 คนจะได้รับ

(4) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ (Idea of approximations) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 8	T	มีทั้งหมดเท่าไรคะ
ITEM 9	S1	12
ITEM 10	T	แล้วถ้าครูแบ่งให้นักเรียน 4 คน แบ่งยังไงถึงจะยุติธรรม
ITEM 11	S2	คนละ 2
ITEM 12	S3	คนละ 3
ITEM 13	T	มีเท่าไรนะคะ
ITEM 14	S1	มี 12 ลูก/มี 4 คน
ITEM 15	T	มี 4 คน ไข่ม้อย ทำไมถึงแบ่งคนละ 3
ITEM 16	S2	เพราะว่าจะได้ 12 พอดี

แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนได้ทราบเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาและคำตอบที่สถานการณ์ต้องการจากการแบ่งลูกอม 12 ลูกให้เด็ก 4 คน เป็นจำนวนเท่า ๆ กัน แล้วนักเรียนแต่ละคนได้ประมาณผลลัพธ์ก่อนที่จะลงมือแก้ปัญหาด้วยตัวเอง

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (Idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 111	T	เราได้วิธีทุกกลุ่มเลย แบ่งให้คนละเท่าไร
ITEM 112	S1	คนละ 3 วิธีแบบแบ่งทีละ 3

ITEM 113	T	มันแตกต่างจากคุณไหม คุณเพิ่มทีละเท่า ๆ กัน
ITEM 114	S2	อันนี้มันแบ่งออกทีละเท่า ๆ กัน
ITEM 115	T	นี่แหละคือการหาร แบ่งยังไง
ITEM 116	S	แบ่งให้มันเท่า ๆ กัน
ITEM 117	T	เหมือนคุณไหม
ITEM 118	S 2	เหมือน คุณมันเพิ่มขึ้น แต่หารลดลง
ITEM 119	T	ลดลงยังไง
ITEM 120	S 2	ทีละเท่า ๆ กัน

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนนำเสนอความเข้าใจของตนเอง หลังจากอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดหน้าชั้นเรียน โดยนักเรียนพยายามจะอธิบายให้เห็นว่าการแบ่งออกทีละเท่า ๆ กันหรือการหาร ซึ่งการหารจะลดลงทีละเท่า ๆ กันกับการคูณจะเป็นการเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน มีความเหมือนกันตรงที่คำว่า “ทีละเท่า ๆ กัน” ตามที่นักเรียนได้อธิบายโดยใช้ภาษาจากความเข้าใจของตนเอง

2.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 34	T	ข้อแรกได้ประโยชน์สัญลักษณ์ว่ายังไง
ITEM 35	S 1	$12 \div 4 = 3$
ITEM 36	T	ทำไมถึงเท่ากับ 3
ITEM 37	S 1	วงกลมหากลุ่ม
ITEM 38	T	ได้กี่กลุ่ม

ITEM 39	S 1	3 กลุ่ม
ITEM 40	T	เพราะฉะนั้นได้รับกี่คนข้อแรก
ITEM 41	S 1	ได้รับ 3 คน

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนพิจารณาเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาในการแบ่งจำนวนลูกกอล์ฟทั้งหมดออกเป็นกลุ่มย่อยเพื่อจัดหมวดหมู่ โดยวิธีการวงกลมลูกกอล์ฟ 4 ชิ้น และนักเรียนได้พิจารณาการจำแนกประเภทที่ตรงกับวัตถุประสงค์ของสถานการณ์ปัญหาว່ว่าต้องการอะไร ซึ่งเป็นวิธีแสดงให้เห็นสมาชิกภายในกลุ่มเพื่อหาจำนวนเด็ก(การหารแบบหาจำนวนกลุ่ม)

(2) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (Idea of representation) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 88	T	ข้อแรกแบ่งลูกกอล์ฟ หนูได้ประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างไร
ITEM 89	S 2	$12 \div 4 = 3$
ITEM 90	T	ใช้วิธีอะไร
ITEM 91	S 2	ใช้วิธีคูณ
ITEM 92	T	เขียนยังไง หนูเขียนยังไง
ITEM 93	S 2	$3 \times 4 = 12$
ITEM 94	T	3 คือ
ITEM 95	S 2	เด็ก แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน คนละ 4

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนพิจารณาเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาในการแบ่งลูกกอล์ฟให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน นักเรียนได้ใช้การคูณเพื่อหาผลลัพธ์ โดยนักเรียนได้ประโยคสัญลักษณ์การคูณจากภาคเรียนที่ 1 มาใช้ในการแก้ปัญหา คือ $3 \times 4 = 12$ ซึ่ง 3

หมายถึงจำนวนคุกกี้ที่เด็กแต่ละคนจะได้รับ 4 คือจำนวนเด็กที่จะได้รับคุกกี้ และ 12 คือจำนวนคุกกี้ทั้งหมดที่ทำการแบ่ง

(3) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 65	T	โอเค ข้อแรกแบ่งคุกกี้ได้ประโยชน์ลักษณะอย่างไร
ITEM 66	S	$12 \div 4 = 3$
ITEM 67	T	หนูใช้วิธีอะไร
ITEM 68	S	วงกลม
ITEM 69	T	วงกลมทำกลุ่มก่อนหรือ
ITEM 70	S	แล้วทำเป็นกลุ่ม
ITEM 71	S	แล้วก็โยง
ITEM 72	T	โยงไข่ม้อยคะ แล้วได้เด็กกี่คนสรุป
ITEM 73	S	3 คน
ITEM 74	T	ซึ่งแต่ละคนได้เท่าไรตรงตามเงื่อนไขโจทย์
ITEM 75	S	คนละ 4 ชิ้น

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนพิจารณาเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาแล้วทำการลงมือแก้ปัญหาด้วยตัวเอง โดยนักเรียนเลือกการวงกลมเพื่อหาสร้างกลุ่มของคุกกี้ กลุ่มละ 4 ชิ้นตามเงื่อนไขของกลุ่ม แล้วโยงคุกกี้แต่ละกลุ่มย่อยเชื่อมกับเด็กซึ่งเชื่อมได้ 3 คน ดังนั้นนักเรียนจึงได้ประโยชน์สัญลักษณ์การหารคือ $12 \div 4 = 3$ ซึ่งเป็นการดำเนินการหาคำตอบของการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม

(4) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 88	T	ข้อแรกแบ่งคุกกี้ หนูได้ประโยชน์สัญลักษณ์ได้อย่างไร
ITEM 89	S 2	$12 \div 4 = 3$
ITEM 90	T	ใช้วิธีอะไร
ITEM 91	S 2	ใช้วิธีคูณ
ITEM 92	T	เขียนยังไง หนูเขียนยังไง
ITEM 93	S 2	$3 \times 4 = 12$
ITEM 94	T	3 คือ
ITEM 95	S 2	เด็ก แบ่งให้เด็ก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน คนละ 4

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำข้างต้นปรากฏเมื่อนักเรียนใช้การคูณเพื่อหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา โดยนักเรียนได้เห็นความสัมพันธ์ของการหารที่แบ่งเท่า ๆ กันและการคูณที่เพิ่มขึ้นที่ละเท่า ๆ กัน นักเรียนจึงใช้ตารางการคูณและสร้างประโยชน์สัญลักษณ์การคูณตัวเลขอะไรคูณ 4 เท่ากับ 12 ตัวเลขนั้นคือ 3 ซึ่งตรงตามความต้องการของสถานการณ์ปัญหา

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (Idea of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 130	T	สถานการณ์ที่ 2 กลุ่ม 7 ได้ว่าอย่างไรถ้าใช้การคูณ
ITEM 131	S 2	$2 \times 4 = 8$
ITEM 132	T	ตอบอะไร
ITEM 133	S 2	4
ITEM 134	T	คำตอบไม่เหมือนกันแล้ว เพื่อนตอนบอะไร
ITEM 135	S 2	ตอบ 4

ITEM 136	T	คำตอบไหนถูก กลุ่ม 7 หรือกลุ่ม 4 ใช้วิธีการคูณแบบกลุ่มไหน
ITEM 137	S	กลุ่ม 7
ITEM 138	T	กลุ่ม 4 ผิดพลาดเพราะอะไร
ITEM 139	T	2 คืออะไร โจทย์บอกอะไร
ITEM 140	T	2 คือ จำนวนส้ม 8 คือ ส้มทั้งหมด
ITEM 141	T	2 ใช้คำตอบมัย ใช้จำนวนเด็กมัย
ITEM 142	S	ไม่ใช่

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏในขั้นตอนนำเสนอและอภิปรายแนวคิด โดยกลุ่มที่ 4 ได้ประโยชน์สัญลักษณ์การคูณคือ $2 \times 4 = 8$ แต่กลับตอบว่าจำนวนเด็กที่ได้รับส้มคือ 2 คน ส่วนกลุ่ม 7 ได้อภิปรายแนวคิดของกลุ่มตนเองว่าได้ประโยชน์สัญลักษณ์การคูณคือ $4 \times 2 = 8$ ได้ผลลัพธ์ที่ โจทย์ต้องการหาจำนวนเด็กคือ 4 คน และได้แสดงความคิดเห็นว่าคำตอบของกลุ่ม 4 ผิดพลาดที่ตอบ 2 เพราะว่า 2 ไม่ใช่จำนวนเด็ก แต่เป็นจำนวนส้มที่เด็กแต่ละคนได้รับ

2.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (Idea of units) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 15	S	ใช้วิธีวาดภาพและนับขีด มีทั้งหมด 30 เดซิลิตร ต้มไปครึ่งละ 6 เดซิลิตร ได้ประโยชน์สัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$ 
---------	---	---

ITEM 16	S	ดื่มได้ 5 ครั้ง
---------	---	-----------------

แนวคิดกับหน่วยข้างต้นปรากฏในขั้นตอนที่นักเรียนได้นำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้า
เรียน นักเรียนได้ทวนสถานการณ์ปัญหาคือมีนมทั้งหมด 30 เดซิลิตร ดื่มไปครั้งละ 6 เดซิลิตร โดยนักเรียน
ได้ใช้การนับช่องสเกลที่เพิ่มขึ้นทีละ 6 สเกล ตามการดื่มนมแต่ละครั้งเป็นหน่วยเดซิลิตร ดังนั้นแนวคิดเกี่ยว
กับหน่วย คือ การแสดงของตัวเลขในรูปแบบของหน่วยเดซิลิตร

(2) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (Idea of representation) แนวคิดเกี่ยวกับการ
แสดงแทนปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 37	T	30 คือจำนวนนมทั้งหมดใช่ไหมคะ? 6 คือจำนวนนมที่ดื่มแต่ละครั้งใช่ไหมคะ? 5 คือจำนวนครั้ง
ITEM 38	T	วิธีแรกหนูใช้อะไร
ITEM 39	S	$30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$
ITEM 40	T	เครื่องหมายบวกกี่ครั้ง
ITEM 41	S	4 ครั้ง
ITEM 42	T	มี 6 กี่ตัว
ITEM 43	S	5 ตัว
ITEM 44	T	วิธีต่อมาเพื่อนใช้การคูณ การคูณเพื่อนเขียนว่า
ITEM 45	S	$6 \times 5 = 30$
ITEM 46	T	ตอบว่าดื่มได้กี่ครั้ง
ITEM 47	S	5 ครั้ง
ITEM 48	T	การคูณแบบนี้ตัวแรกคืออะไร แทนอะไรตัวแรกประโยคสัญลักษณ์การคูณ
ITEM 49	S	จำนวนนมดื่มแต่ละครั้ง
ITEM 50	T	ดื่มไปเท่าไร
ITEM 51	S	6 เดซิลิตร

ITEM 52	T	5 คือ
ITEM 53	S	จำนวนที่ตีไป
ITEM 54	T	ตีไปเท่าไร
ITEM 55	S	ตีได้ 5 ครั้ง
ITEM 56	T	30 คือ
ITEM 57	S	ปริมาณ

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนข้างต้นปรากฏในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนใช้การบวกเพิ่มทีละ 6 เดซิลิตรแทนการตีแต่ละครั้งจนกระทั่งครบตามปริมาณของนมทั้งหมด 30 เดซิลิตร ต่อจากนั้นอีกวิธีที่นักเรียนได้ใช้วิธีการคูณซึ่งต่อยอดจากการบวกเพิ่มทีละ 6 จึงได้ประโยชน์สัญลักษณ์การคูณที่ใช้ในการหาคำตอบคือ $6 \times 5 = 30$ โดย 6 แทนปริมาณนมที่ตีแต่ละครั้งคือ 6 และ 5 คือผลลัพธ์คือ จำนวนครั้งที่ตีไป สุดท้าย 30 แทนด้วยปริมาณของนมทั้งหมดที่ตีไป

(3) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (Idea of operation) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรแกรมต่อไปนี้

ITEM 28	T	กลุ่มต่อมากลุ่ม 1 กลุ่มนี้ว่าดูรูปการคูณให้ด้วย ประโยชน์สัญลักษณ์ได้อะไรกลุ่มนี้
ITEM 29	S	$30 \div 6 = 5$
ITEM 30	T	30 คืออะไร
ITEM 31	S	จำนวนน้ำทั้งหมด
ITEM 32	T	ใช้วิธีไหน
ITEM 33	S	ใช้การคูณ $6 \times 5 = 30$
ITEM 34	T	ใช้วิธีไหนอีก
ITEM 35	S	นับขีดและโยงเส้น



แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการข้างต้นปรากฏในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนใช้วิธีการคูณในการแก้ปัญหา โดยได้ประโยชน์สัญลักษณ์การคูณคือ $6 \times 5 = 30$ และนักเรียนใช้การขีดและโยงเส้นเป็นช่วง ช่วงละ 6 สเกลตามจำนวนนมที่ดื่มในแต่ละครั้ง โดยค่อย ๆ เพิ่มขึ้นทีละ 6 สเกลหรือ 6 เดซิลิตรตามสถานการณ์ปัญหา นักเรียนทราบความหมายและที่มาของวิธีการแต่ละวิธีที่นักเรียนเลือกใช้เพื่อดำเนินการคำนวณ

(4) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 70	T	วิธีสุดท้าย เพื่อนใช้การแบ่ง
ITEM 71	S	เอา 30 ปริมาณน้ำดื่ม แบ่ง 30 เป็น 15 สองตัว
ITEM 72	T	แล้วเอาออกมาเท่าไร
ITEM 73	S	6 ค่ะ
ITEM 74	T	แล้วจาก 15 ดื่มไป 6 จะเหลือเท่าไร
ITEM 75	S	เหลืออยู่ 9
ITEM 76	T	ดื่มครั้งละเท่าไร
ITEM 77	S	6
ITEM 78	T	แล้ว 9 ดื่มไป 6 เหลือเท่าไร
ITEM 79	S	3
ITEM 80	T	รวมกันเป็น 6

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน โดยนักเรียนได้เลือกวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนการแก้ปัญหาด้วยตัวเองเพื่อหาผลลัพธ์ตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา ซึ่งนักเรียนได้ทำการแบ่งปริมาณนม 30 เดซิลิตร ออกเป็น 15 เดซิลิตร และ 15 เดซิลิตร จากนั้นนักเรียนได้ทำการแบ่ง 6 เดซิลิตรหรือการตักนมในแต่ละครั้ง ออกจาก 15 เดซิลิตรทั้งสองกลุ่ม ทำให้เหลืออยู่ 9 เดซิลิตร จากนั้นนักเรียนทำการแบ่ง 6 เดซิลิตร ออกจาก 9 เดซิลิตรกลุ่ม แล้วจะเหลือ 3 เดซิลิตรสองกลุ่มจากนั้นนำมารวมกันเป็น 6 เดซิลิตร ดังนั้นนักเรียนจึงได้ข้อสรุปการตักนม 30 เดซิลิตร ตักครั้งละ 6 เดซิลิตร โดยตักทั้งสิ้น 5 ครั้ง

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (Ideas of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 44	T	วิธีต่อมาเพื่อนใช้การคูณ การคูณเพื่อนเขียนว่า
ITEM 45	S	$6 \times 5 = 30$
ITEM 46	T	ตอบว่าตักได้กี่ครั้ง
ITEM 47	S	5 ครั้ง
ITEM 48	T	การคูณแบบนี้ตัวแรกคืออะไร แทนอะไรตัวแรกประโยคสัญลักษณ์การคูณ
ITEM 49	S	จำนวนนมตักแต่ละครั้ง
ITEM 50	T	ตักไปเท่าไร
ITEM 51	S	6 เดซิลิตร
ITEM 52	T	5 คือ
ITEM 53	S	จำนวนที่ตักไป
ITEM 54	T	ตักไปเท่าไร
ITEM 55	S	ตักได้ 5 ครั้ง

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นปรากฏในขั้นตอนนำเสนอและอภิปรายแนวคิดเมื่อนักเรียนได้อธิบายความคิดผ่านกระบวนการที่ตนใช้ในการแก้ปัญหานั้นคือการคูณ ซึ่งเป็นความรู้เดิมที่

นักเรียนได้เรียนรู้จากภาคเรียนที่ 1 และนักเรียนได้อธิบายที่มาของจำนวนที่ปรากฏในประโยคสัญลักษณ์การคูณ $6 \times 5 = 30$ เพื่อที่จะดำเนินการหาผลลัพธ์

2.4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) แนวคิดเกี่ยวกับเซตปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 146	T	มันมีแก้วทั้งหมด 10 ใบใช่มั้ย
ITEM 147	S	ใช่ค่ะ
ITEM 148	T	เพื่อนเลววงแบบนี้
ITEM 149	T	แล้วเพื่อนบอกว่าแก้วนี้ใช้ ใช้ทำอะไร
ITEM 150	T	ใช้ทำอะไร
ITEM 151	S	ใส่น้ำ
ITEM 152	T	อะ นับพร้อมกัน
ITEM 153	S	1 2 3 4 5 6
ITEM 154	T	แล้วเพื่อนบอกว่าอันนี้คืออะไร
ITEM 155	S	ทิ้ง
ITEM 156	T	เพราะว่าอะไร น้ำหมดยัง
ITEM 157	S	หมดแล้ว

แนวคิดเกี่ยวกับเซตข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียนนักเรียนได้นำเสนอแนวคิดที่ใช้ในการแก้ปัญหาของตัวเอง ซึ่งนักเรียนได้ทำการจัดกลุ่มของแก้วที่จะใช้เพื่อพิจารณาว่าจะต้องใช้แก้วกี่ใบหากมีน้ำแดงทั้งหมดปริมาณ 6 เดซิลิตร ถ้าเทน้ำแดง 1 เดซิลิตรลงในแก้ว

แต่ละใบ โดยการวงกลมล้อมรอบแก้วน้ำ 6 แก้ว จากทั้งหมด 10 แก้ว จากภาพประกอบสถานการณ์ปัญหา ส่วนแก้ว 4 ใบที่เหลือไม่ได้ถูกนำมาพิจารณาในการหาผลลัพธ์หลังจากการจัดกลุ่มใหม่

(2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (Idea of units) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 79	T	ต่อมาวิธีที่ 2 ของกลุ่ม 1 ได้ประโยชน์สัญลักษณ์ว่าอย่างไร
ITEM 80	S	$6 \div 1 = 6$
ITEM 81	S	แล้วเพื่อนก็วาดภาพ แก้วละ 1
ITEM 82	T	1 อะไรคะ หน่วยอะไร
ITEM 83	S	เดซิลิตร
ITEM 84	T	ตอบอะไรที่นี้ 6 อะไร
ITEM 85	S	6 ใบ

แนวคิดเกี่ยวกับหน่วยข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนได้นำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา โดยการวาดภาพแก้วเพื่อหาจำนวนแก้วที่จะใช้ในการเทน้ำแดง 6 เดซิลิตร โดยนักเรียนได้เขียนหน่วย 1 เดซิลิตรกำกับแก้วที่นักเรียนวาดจำนวน 6 ใบ แสดงถึงการเทน้ำแดงครั้งละ 1 เดซิลิตรตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา ซึ่งผลลัพธ์คือใช้แก้วในการเทน้ำแดง 6 ใบ

(3) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (Idea of algorithms) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ITEM 132	T	กลุ่ม 6 ได้ประโยชน์สัญลักษณ์ว่าอย่างไร
ITEM 133	S	$6 \div 1 = 6$ ค่ะ
ITEM 134	T	อันนี้หนูเขียนว่าเท่าไร
ITEM 135	S	$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
ITEM 136	T	มีเครื่องหมายบวกกี่ครั้ง

ITEM 137	S	5 ครั้ง
ITEM 138	T	มีเลข 1 กี่ตัว 6 ตัว
ITEM 139	S	6 ตัว
ITEM 140	T	แล้วก็วิธีที่กลุ่ม 6 ถนัด แบ่งใช้มัย แบ่งแบบโยงออกใช้มัย 6 ตัว
ITEM 141	T	6 หนูแยกเป็นอะไร
ITEM 142	S	เป็น 3
ITEM 143	T	แล้ว 3 แบ่งเป็นเท่าไร
ITEM 144	S	1 ค่ะ

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนได้นำเสนอแนวคิดในการดำเนินการแก้ปัญหา โดยเริ่มจากการวิธีที่ 1 ใช้การตั้ง 6 ซึ่งแทนจำนวนน้ำแดงทั้งหมด เท่ากับการบวกเพิ่มทีละ 1 แทนการเทน้ำลงแก้วแต่ละใบ จนกระทั่ง 1 ที่บวกเพิ่มมีค่าเท่ากับ 6 จึงได้ว่าได้ 1 ทั้งหมด 6 ตัว จึงได้ผลลัพธ์ว่าเทน้ำแดงลงแก้วทั้งหมด 6 ใบ ต่อมาเป็นวิธีที่ 2 นักเรียนใช้การแบ่งหรือแยกปริมาณน้ำแดงทั้งหมด 6 เดซิ لترออกทีละชั้น เริ่มจากการแบ่ง 6 ออกเป็น 3 สองกลุ่ม จากนั้นนักเรียนได้ทำการแบ่ง 3 ทั้งสองกลุ่มออกเป็นกลุ่มละ 1 จึงได้ว่า 6 ถูกแบ่งออกมาเป็น 1 จำนวน 6 กลุ่ม ดังนั้นนักเรียนได้เลือกวิธีการและดำเนินการคำนวณบนพื้นฐานความเข้าใจของตนเองเพื่อหาผลลัพธ์อย่างเป็นขั้นตอน

ITEM 145	T	วิธีที่ 3
ITEM 146	T	มันมีแก้วทั้งหมด 10 ใบใช้มัย
ITEM 147	S	ใช่ค่ะ
ITEM 148	T	เพื่อนเลววงแบบนี้
ITEM 149	T	แล้วเพื่อนบอกว่าแก้วนี้ใช้ ใช้ทำอะไร
ITEM 150	T	ใช้ทำอะไร
ITEM 151	S	ใส่น้ำ

ITEM 152	T	อะ นับพร้อมกัน
ITEM 153	S	1 2 3 4 5 6
ITEM 154	T	แล้วเพื่อนบอกว่าอันนี้คืออะไร
ITEM 155	S	ทั้ง
ITEM 156	T	เพราะว่าอะไร น้ำหมดยัง
ITEM 157	S	หมดแล้ว
ITEM 158	T	วิธีที่ 4 ใช้การคูณ
ITEM 159	T	อะไรคูณ
ITEM 160	S	$1 \times 6 = 6$
ITEM 161	T	6 ตัวนี้คืออะไร(ตัวเท่ากับ)
ITEM 162	S	น้ำแดงทั้งหมด
ITEM 163	T	1 คืออะไร
ITEM 164	S	1 เดซิลิตร น้ำแต่ละครั้งที่เท
ITEM 165	T	6 คืออะไร
ITEM 166	T	แก้วไข่มัย
ITEM 167	S	6 แก้ว
ITEM 168	T	แล้วเพื่อนตอบอะไร ตอบก็ใบ
ITEM 169	S	ตอบ 6

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการข้างต้นเป็นการต่อเนื่องจาก 2 วิธีก่อนหน้านี้ที่นักเรียนได้นำเสนอและอภิปรายหน้าชั้นเรียน โดยวิธีที่ 3 นักเรียนได้ทำการวงกลมจัดกลุ่มแก้วที่จะใช้ในการแก้ปัญหา ส่วนที่เหลือที่ไม่ได้ใช้ไม่ได้ถูกนำมาคำนวณในการหาผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนจึงให้เหตุผลว่ากลุ่มที่นักเรียนได้วงกลมเลือกไว้คือแก้วที่จะเทน้ำแดงแก้วละ 1 เดซิลิตรลงไป จากน้ำแดงทั้งหมด 6 เดซิลิตร และวิธีที่ 4 นักเรียนได้ใช้การคูณเพื่อดำเนินการแก้ปัญหาและหาผลลัพธ์จากพื้นฐานตารางการคูณเดิมที่นักเรียนได้เคยเรียน ซึ่งนักเรียนได้เขียนประโยคสัญลักษณ์

$1 \times 6 = 6$ แล้วสามารถบอกที่มาแต่ละส่วนของประโยคสัญลักษณ์

(4) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (Idea of fundamental properties) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน ปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 158	T	วิธีที่ 4 ใช้การคูณ
ITEM 159	T	อะไรคูณ
ITEM 160	S	$1 \times 6 = 6$
ITEM 161	T	6 ตัวนี้คืออะไร(ตัวเท่ากับ)
ITEM 162	S	น้ำแดงทั้งหมด
ITEM 163	T	1 คืออะไร
ITEM 164	S	1 เดซิลิตร น้ำแต่ละครั้งที่เท
ITEM 165	T	6 คืออะไร
ITEM 166	T	แก้วไข่ม้อย
ITEM 167	S	6 แก้ว
ITEM 168	T	แล้วเพื่อนตอบอะไร ตอบก็ใบ
ITEM 169	S	ตอบ 6

แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนได้อธิบายความหมายของประโยคสัญลักษณ์การคูณ $1 \times 6 = 6$ ซึ่งตัวตั้งคือ 1 หมายถึงสมาชิกในแต่ละกลุ่ม ในที่นี้หมายถึงปริมาณน้ำแดง 1 เดซิลิตรที่เทลงในแก้วแต่ละใบ และตัวคูณคือ 6 ซึ่งจะเป็นคำตอบของประโยคสัญลักษณ์การหารหมายถึงจำนวนกลุ่มหรือจำนวนแก้ว โดยนักเรียนได้นำความรู้จากตารางการคูณมาใช้และเอกลักษณ์การคูณ เพื่อดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบจากโจทย์ปัญหาการหารที่หารด้วย 1 ของสถานการณ์ปัญหาการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม

(5) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (Ideas of expressions) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดปรากฏโดยการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ดังโพรโทคอลต่อไปนี้

ITEM 73	T	ต่อมากลุ่มที่ 1 กลุ่มนี้มีสองแนวคิดที่แตกต่างกัน
ITEM 74	T	วิธีแรกของกลุ่มที่ 1
ITEM 75	S	$6 \div 6 =$ วัดแก้วไว้หกใบ แล้วเขียนเลข 100 (1 dl = 100 ml)
ITEM 76	T	แล้วก็ตอบอะไรวิธีแรก เพื่อนตอบ 6
ITEM 77	T	$6 \div 6$ จะเป็น 6 มั้ย ตัวตั้งและตัวหารเหมือนกันคำตอบจะเป็นอะไร
ITEM 78	S	1
ITEM 79	T	ต่อมาวิธีที่ 2 ของกลุ่ม 1 ได้ประโยชน์สัญลักษณ์ว่าอย่างไร
ITEM 80	S	$6 \div 1 = 6$
ITEM 81	S	แล้วเพื่อนก็วาดภาพ แก้วละ 1
ITEM 82	T	1 อะไรคะ หน่วยอะไร
ITEM 83	S	เดซิลิตร
ITEM 84	T	ตอบอะไรที่นี่ 6 อะไร
ITEM 85	S	6 ใบ
ITEM 86	T	วิธีที่ 1 หรือ 2 ถูก
ITEM 87	T	ใครคิดว่าวิธีที่ 1 ยกมือให้ดูหน่อย คนทำก็ไม่ยกหรือ
ITEM 88	T	วิธีที่ 2 ละ
ITEM 89	T	$6 \div 6$ ได้เท่าไร
ITEM 90	S	1
ITEM 91	T	ตัวตั้งกับตัวหารเป็นตัวเดียวกันได้คำตอบคืออะไร
ITEM 92	S	1
ITEM 93	T	ยกเว้น $0 \div 0$ นะคะ $0 \div 0$ ได้มั้ย
ITEM 94	S	ไม่ได้

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดข้างต้นในขั้นตอนการนำเสนอแนวคิดและอภิปรายหน้าชั้นเรียน นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้นำเสนอและอภิปราย 2 แนวคิดที่มีวิธีการที่แตกต่างกัน ซึ่งวิธีที่ 1 ได้เขียน $6 \div 6$ ส่วนวิธีที่ 2 ได้ประโยชน์สัญลักษณ์ $6 \div 1 = 6$ จากวิธีการที่มีการแสดงแนวคิดหรือความคิดของนักเรียนกลุ่มที่ 1 ทั้งสองวิธีจึงเกิดการอภิปรายเพื่อหากระบวนการและผลลัพธ์ที่ถูกต้องที่สุด และนักเรียนได้ตอบคำถามครูผู้สอนจากการใช้ความรู้เดิมจากคาบที่ผ่านมาว่า ถ้าหากตัวตั้งหารและตัวหารเหมือนกันอย่าง $6 \div 6$ คำตอบจะเท่ากับ 1 จึงเป็นการแสดงความคิดเพื่อหากล้าวิธีการที่ไม่ถูกต้องตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาออกไป

3. สรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ทั้ง 9 แนวคิด โดยนำเสนอในรูปแบบตาราง

จากการวิเคราะห์ข้อมูลโดยอาศัยกรอบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของ Isoda & Katagiri (2012) ทำให้สามารถสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏโดยภารกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยแยกเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์แต่ละประเภทที่ปรากฏในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ ดังแสดงในตารางที่

ประเภทของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012)	การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยนำเสนอเป็นภาพถ่ายผลงานของนักเรียน				การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยนำเสนอเป็นโปรโตคอล			
	แผนการจัดการเรียนรู้ที่				แผนการจัดการเรียนรู้ที่			
	1	2	3	4	1	2	3	4
แนวคิดเกี่ยวกับเซต	✓	✓		✓	✓	✓		✓
แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย	✓			✓			✓	✓
แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน	✓	✓				✓	✓	
แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ			✓	✓	✓		✓	

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ					✓			
แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน		✓		✓				✓
แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงกา กระทำ			✓	✓		✓		
แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง ความคิด	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

ตารางที่ 4 แสดงผลสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร

จากตารางที่ 4 สรุปได้ว่าชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ทำให้นักเรียนเกิดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด 9 ประเภท แต่แนวคิดทางคณิตศาสตร์แต่ละประเภทไม่ได้ปรากฏในทุกแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

แนวคิดเกี่ยวกับเซต จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับเซตในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1, 2 และ 4 ซึ่งเป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่เกี่ยวกับแบ่งสิ่งของออกเป็นกลุ่มซึ่งเป็นพื้นฐานของการหาร โดยนักเรียนได้ดำเนินการจัดกลุ่มตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาการหารแบบหาจำนวนสมาชิกภายในกลุ่มและการหารแบบหาจำนวนกลุ่ม

แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับหน่วยในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1, 3 และ 4 ซึ่งแนวคิดเกี่ยวกับหน่วยที่ปรากฏจะเป็นแบ่งหน่วยหน่วยการนับ เช่น แบ่งให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน ต้มครั้งละ 6 เดซิลิตร และเทน้ำ 1 เดซิลิตรลงในแก้วแต่ละใบ โดยส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับการแก้ปัญหการหารที่ใช้การแบ่งที่ละเท่า ๆ กัน และมีหน่วยปริมาณของเหลวคือ เดซิลิตรกำกับ ซึ่งนักเรียนใช้ประโยคสัญลักษณ์การบวกเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1, 2 และ 3 เนื่องจากแผนการจัดการเรียนรู้นี้ดังกล่าวจะมีสถานการณ์ปัญหาที่เป็นโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาร ซึ่งนักเรียนดำเนินการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาแล้วใช้ประโยคสัญลักษณ์การคูณแสดงแทนจำนวนต่าง ๆ แล้วหาผลลัพธ์ของสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับการหาร

แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1, 3 และ 4 เนื่องจากแผนการจัดการเรียนรู้ดังกล่าวต้องการให้นักเรียนเข้าใจความหมายของการดำเนินการคำนวณตัวเลขเพื่อหาคำตอบ เช่น การแบ่งที่ละเท่า ๆ กัน การวาดรูปประกอบ และใช้การบวกเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กันเพื่อตรวจสอบผลลัพธ์ เป็นต้น ซึ่งนักเรียนมีการทำความเข้าใจกับสถานการณ์ปัญหาแล้วมีการดำเนินการคำนวณหาคำตอบ ซึ่งสามารถอธิบายความหมายและที่มาของการคำนวณ โดยนักเรียนมีการอธิบายที่มาและความหมายของการดำเนินการคำนวณหาคำตอบผ่านการตอบคำถามและเขียนลงในใบกิจกรรม

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1, 2, 3 และ 4 ในแผนการจัดการเรียนรู้ดังกล่าวนักเรียนพยายามที่จะดำเนินการแก้ปัญหาโดยอาศัยความเข้าใจของตนเองมาสร้างเป็นระเบียบแบบแผน ซึ่งการปรากฏแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการทุกแผนการสอนนี้เพราะว่านักเรียนมีแนวคิดที่หลากหลายในการดำเนินการหาผลลัพธ์ ตัวอย่างเช่น นักเรียนดำเนินการวาดภาพ การแยกจำนวน การจัดกลุ่มใหม่ การบวกเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กันตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา และใช้ความรู้จากตารางการคูณ

แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการประมาณในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 โดยแนวคิดดังกล่าวจะปรากฏเมื่อนักเรียนเห็นสถานการณ์ปัญหา แล้วจะมีการคาดการณ์ประมาณวิธีการหาคำตอบและผลลัพธ์ก่อนการแก้ปัญหาจริง ที่จริงแล้วนักเรียนอาจจะมีการประมาณเกี่ยวกับวิธีการและผลลัพธ์นอกจากแผนการเรียนรู้ที่ 1 แต่ไม่ได้แสดงและปรากฏออกมาจากความคิดผ่านคำพูดของนักเรียน ทั้งนี้แนวคิดดังกล่าวจะไม่ปรากฏในใบกิจกรรม เนื่องจากนักเรียนจะมีการคาดการณ์วิธีการหาคำตอบและผลลัพธ์ผ่านคำพูดกับครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ ซึ่งไม่ได้เขียนลงไปใบกิจกรรม

แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานในทุกแผนการจัดการเรียนรู้เนื่องจากในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 นักเรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับพื้นฐานที่มาของการคูณ จากนั้นนักเรียนทำการจัดกลุ่มของสิ่งของโดยเพิ่มขึ้นทีละ 4 จนกระทั่งครบจำนวนทั้งหมดตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา แล้วดำเนินการเขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณเพื่อใช้ในการหาผลลัพธ์การหาร แผนการจัดการเรียนรู้ต่อมาคือแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 นักเรียนได้ดำเนินการ

แก้ปัญหาการหารด้วย 1 จากการแยกจำนวนพร้อมกับวาดภาพประกอบ จัดหมวดหมู่ และนักเรียนได้นำความเข้าใจเกี่ยวสมบัติการคูณด้วย 1 จากภาคเรียนที่ 1 เป็นต้น นักเรียนจึงใช้วิธีการดังกล่าวแสดงการแก้ปัญหาและสมบัติการหารด้วย 1 ที่จะได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้งเสมอ

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2, 3 และ 4 เนื่องจากนักเรียนได้นำความรู้จากประสบการณ์ในอดีตที่ผ่านการเรียนรู้และทำความเข้าใจมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหา โดยพิจารณาในสิ่งที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์ภายใต้เงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด จากตารางจะเห็นได้ว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดในทุกแผนการจัดการเรียนรู้ เนื่องจากชั้นเรียนที่ใช้نواتกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ได้มอบโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาด้วยตนเอง มีเสรีภาพในการคิด ยอมรับความผิดพลาด และแลกเปลี่ยนกระบวนการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน ทำให้นักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายและเข้าใจความแตกต่างทางความคิด

จากตารางที่ 5 พบว่า มีแนวคิดที่เกิดขึ้นในทุกแผนการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วย แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการและแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด อีกทั้งยังพบอีกว่า มีประเภทของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่พบจากทั้งการวิเคราะห์แนวคิดจากภาพถ่ายผลงานของนักเรียนและจากการวิเคราะห์โพโทคอลของชั้นเรียน ประกอบด้วย แนวคิดเกี่ยวกับเซต แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ และแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด มีเพียงแนวคิดเกี่ยวกับการประมาณที่ไม่พบจากการวิเคราะห์ภาพถ่ายผลงานของนักเรียน

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์แนวคิดเรื่อง การหาร ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้
นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด กลุ่มเป้าหมายคือ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียน
โรงเรียนเซนต์คาเบรียล ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2567 จำนวน 29 คน ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ
เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง การหาร จำนวน 4 แผน
เครื่องบันทึกวีดิทัศน์ และเครื่องบันทึกภาพนิ่ง วิเคราะห์ข้อมูลจากผลงานของนักเรียนและโพรโทคอลของ
ชั้นเรียน โดยวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การหาร ตามกรอบแนวคิดของ Isoda &
Katagiri (2012) ซึ่งแบ่งแนวคิดทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 9 ประเภท ได้แก่ แนวคิดเกี่ยวกับเซต แนวคิด
เกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอน
วิธีการ แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงกระทำ
และแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด เพื่อศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในชั้นเรียนที่ใช้
นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดดังกล่าว โดยนำเสนอสรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะใน
แต่ละประเด็น แสดงได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. สรุปผลการวิจัย
2. อภิปรายผลการวิจัย
3. ข้อเสนอแนะ

โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. สรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรม การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยการวิเคราะห์ผ่านโปรโตคอลและภาพถ่ายผลงานของนักเรียน พบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 9 ประเภท ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ซึ่งผู้วิจัยสรุปได้ดังนี้

(1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต (idea of sets) นักเรียนจัดกลุ่มของจำนวนทั้งหมดเป็นกลุ่มย่อยและจัดกลุ่มตามเงื่อนไข เพื่อพิจารณาและดำเนินการหาผลลัพธ์

(2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (idea of units) นักเรียนแสดงหน่วยสิ่งของจำนวนต่อกลุ่มที่แบ่งโดย จะเป็นการแบ่งจำนวนเท่า ๆ กันหรือใช้การบวกเพิ่มขึ้นทีละเท่า ๆ กัน เพื่อตรวจสอบผลลัพธ์ และแสดงหน่วยกำกับในสถานการณ์ปัญหาที่มีหน่วยของของเหลวเข้ามาเกี่ยวข้องนั้นคือหน่วยเดซิลิตร

(3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง (idea of representation) นักเรียนดำเนินการวาดภาพแสดงแทน สิ่งของและเขียนประโยคสัญลักษณ์การคูณและการหาร และได้อธิบายว่าภาพที่วาดและจำนวนแต่ละจำนวนแสดงแทนสิ่งใด

(4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (idea of operations) นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาการหาร จากความหมายของการหารและระบุวิธีการในการหาคำตอบ เช่น แบ่งกลุ่มย่อยให้สมาชิกในกลุ่มเท่ากัน ต่อมาใช้ในการคูณเข้ามาช่วย แล้วได้ผลลัพธ์ของการหาร

(5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ (idea of algorithms) นักเรียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาเป็น ขั้นตอนโดยเริ่มจากวิธีการแบ่งจากจำนวนทั้งหมดเรื่อย ๆ ตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหา จนสามารถสรุปและได้ผลลัพธ์

(6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ (idea of approximation) นักเรียนคาดการณ์วิธีการและ คำตอบของปัญหาไว้ล่วงหน้า

(7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน (idea of fundamental properties) นักเรียนใช้สมบัติ เอกลักษณะการคูณมาใช้ในการหาผลลัพธ์ของสถานการณ์ปัญหาการหารด้วย 1 และแสดงสมบัติการหาร ด้วย 1 ที่จะได้ผลลัพธ์เท่ากับตัวตั้ง

(8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ (idea of functional thinking) นักเรียนดำเนินการ แก้ปัญหาจากการพิจารณาสิ่งที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา เช่น ใช้การแบ่งเท่า ๆ กัน การ บวก และการคูณ จากนั้นหาเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของทั้งสามกระบวนการในการดำเนินการแก้ปัญหา การหารตามเงื่อนไข

9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด (idea of expressions) นักเรียนแสดงความคิดผ่านการพูดและเขียนเพื่ออธิบายแนวคิดในการแก้ปัญหาบนพื้นฐานความเข้าใจของตนเอง

จากการสรุปผลการวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด พบว่า มีแนวคิดที่เกิดขึ้นในทุกแผนการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วย แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการและแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด อีกทั้งยังพบอีกว่า มีประเภทของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่พบจากทั้งการวิเคราะห์แนวคิดจากภาพถ่ายผลงานของนักเรียนและจากการวิเคราะห์โพโทคอลของชั้นเรียน ประกอบด้วย แนวคิดเกี่ยวกับเซต แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ และแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด มีเพียงแนวคิดเกี่ยวกับการประมาณที่ไม่พบจากการวิเคราะห์ภาพถ่ายผลงานของนักเรียน

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 9 ประเภทข้างต้นนี้ แสดงให้เห็นว่า ชั้นเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ซึ่งเป็นนวัตกรรมที่ส่งเสริมและพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เป็นชั้นเรียนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้จากการแก้ปัญหาด้วยตนเอง มีเสรีภาพในการคิด ยอมรับความผิดพลาด และแลกเปลี่ยนกระบวนการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน ทำให้นักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายและเข้าใจความแตกต่างทางความคิด

2. อภิปรายวิจัย

การจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด เป็นชั้นเรียนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนมีโอกาสแสดงแนวคิด มีโอกาสสื่อสารแลกเปลี่ยนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน มีโอกาสได้อภิปรายแนวคิดที่เกิดขึ้นอย่างมีเหตุผล ทำให้นักเรียนเกิดแนวคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย สอดคล้องกับ ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2546) ที่กล่าวว่า หลักสำคัญของวิธีการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดอยู่ที่การให้ความสำคัญกับเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยเฉพาะความแตกต่างทางด้านการคิด ครูจะสอนอย่างไรที่การคิดของนักเรียนทุกคนในชั้นเรียนได้รับความสำคัญ วิธีการภาคปฏิบัติที่ได้ปรับมาจากแนวคิดของประเทศญี่ปุ่นก็คือ การออกแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ปัญหาปลายเปิดเพื่อสร้างสถานการณ์ปัญหาที่เปิดกว้างรองรับแนวคิดของนักเรียนในชั้นเรียนให้ได้มากที่สุดหรือทุกคน จะเห็นได้ว่าในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเป็นชั้นเรียนที่ให้ความสำคัญกับแนวคิดของนักเรียน จึงส่งผลให้นักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่

หลากหลาย ผลการวิจัยพบว่า ในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง การหาร นักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 9 ประเภท ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) ได้แก่ 1) แนวคิดเกี่ยวกับเซต นักเรียนจัดกลุ่มของจำนวนทั้งหมดเป็นกลุ่มย่อยเพื่อคำนวณการหาร 2) แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย นักเรียนแสดงหน่วยสิ่งของจำนวนต่อกลุ่มที่แบ่ง 3) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดง นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์การหารแสดงแทนวิธีการหาคำตอบ 4) แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหการหารจากความหมายของการหารและระบุวิธีการในการหาคำตอบ เช่น แบ่งกลุ่มย่อยให้สมาชิกในกลุ่มเท่ากัน 5) แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ นักเรียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหเป็นขั้นตอน 6) แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณ นักเรียนคาดการณ์คำตอบของปัญหาไว้ล่วงหน้า 7) แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน นักเรียนแสดงสมบัติการหารด้วย 1 8) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ นักเรียนใช้การแบ่งเท่า ๆ กัน การบวก และการคูณในการแก้ปัญหการหาร และ 9) แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด นักเรียนใช้การพูดและเขียนเพื่ออธิบายแนวคิดในการแก้ปัญหด้วยความเข้าใจของตนเอง จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเป็นชั้นเรียนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แก้ปัญหด้วยตนเองและแสดงความคิดในการแก้ปัญห จึงส่งผลให้แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดปรากฏในทุกแผนการจัดการเรียนรู้

ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด นักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดในระหว่างร่วมเรียนรู้ในชั้นเรียน โดยนักเรียนได้มีการอธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหและการให้เหตุผลในการแก้ปัญหซึ่งมาจากแนวคิดที่มาจากประสบการณ์การเรียนรู้ของตนเอง โดยอธิบายผ่านการเขียนลงในใบกิจกรรมและผ่านการสนทนากับเพื่อนและพูดแสดงแนวคิดกับครูผู้สอน สอดคล้องกับ Nohda (1983 อ้างถึงใน ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2547) ที่กล่าวว่า การสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดมุ่งเน้นที่จะเปิดใจของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์มากกว่าการเน้นการสอนเนื้อหาให้ครบ ครูที่ใช้วิธีการแบบเปิดในการสอนต้องพยายามทำความเข้าใจแนวคิดของนักเรียนให้ได้มากที่สุด โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายหรือแลกเปลี่ยนแนวคิดกับนักเรียนคนอื่น และกล่าวว่า วิธีการแบบเปิดมีความสัมพันธ์กับความเป็นอิสระของกิจกรรมของนักเรียน นั่นคือ ครูผู้สอนจะต้องตระหนักในคุณค่าของกิจกรรมของนักเรียน ให้อิสระกับนักเรียน โดยที่พยายามไม่เข้าไปแทรกแซงโดยไม่จำเป็น จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเป็นชั้นเรียนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดในการแก้ปัญหและอธิบายวิธีให้เหตุผลการแก้ปัญหาร่วมกันในชั้นเรียน จึงทำให้แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิดปรากฏในทุกแผนการจัดการเรียนรู้

ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด นักเรียนมีการแสดงแนวคิดของแต่ละประเภทผ่านการเขียน สามารถเห็นได้จากภาพถ่ายผลงานของนักเรียน ส่วนการแสดงแนวคิดผ่านการพูด การสนทนา และการแสดงออกทางพฤติกรรม สามารถเห็นได้จากโพรโทคอลของชั้นเรียน โดยแนวคิดที่นักเรียนแสดงออกผ่านวิธีการดังกล่าวประกอบด้วย แนวคิดเกี่ยวกับเซต แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการ แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงการกระทำ และแนวคิดเกี่ยวกับการแสดงความคิด สอดคล้องกับ นุจรินทร์ เอ็มชัยภูมิ(2557) ที่กล่าวว่า แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหมายถึง วิธีการแก้ปัญหาของนักเรียนที่มีต่อสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่แสดงออกในรูปของการพูด การหยิบจับ การขีดเขียน การแสดงสีหน้าท่าทาง จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ทำให้นักเรียนแสดงแนวคิดในแต่ละประเภทผ่านกระบวนการแก้ปัญหาและอภิปรายแนวคิดร่วมกันในชั้นเรียนหลากหลายวิธีการ

3. ข้อเสนอแนะ

3.1 ข้อเสนอในการทำวิจัยครั้งต่อไป

3.2.1 จากการวิจัยพบว่าการใช้สื่อการจัดการเรียนรู้ส่งผลอย่างมากต่อการส่งเสริมให้เกิดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียน ดังนั้นต้องตระหนักถึงการเลือกและใช้สื่อการเรียนรู้ที่เหมาะสม

3.2.2 ควรศึกษาการส่งเสริมและต่อยอดแนวคิดของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน เพื่อทำความเข้าใจ ต่อยอดพัฒนา และการนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นจากชั้นเรียนที่ได้นำนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดไปใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด

3.2 ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

3.2.1 ชั้นเรียนที่ได้นำนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดไปปรับใช้ในโรงเรียน สามารถนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทั้ง 9 ประเภท มาเป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง การหาร ระดับชั้นประถมศึกษาที่มีเนื้อหาสอดคล้องกับหนังสือคณิตศาสตร์สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

3.2.2 ชั้นเรียนที่ได้ำนานวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดไปปรับใช้ในโรงเรียน สามารถนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ทั้ง 9 ประเภท เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้อื่นและระดับชั้นอื่นได้ เพื่อช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

บรรณานุกรม

- กิตติศักดิ์ ใจอ่อน, และกตัญญูตา บางโท. (2563). การคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องพื้นที่
โดยใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. วิทยานิพนธ์ปริญญา
ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- จตุพร นาสินสร้อย. (2557). การคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การคูณในชั้นเรียนที่ใช้
การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- นุจรินทร์ เอ็มชัยภูมิ(2557). แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่องการบวกในชั้นเรียนที่ใช้
นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตร
มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น
- กองทุนเพื่อความเสมอภาคทางการศึกษา. (2564). สำนัวจนผลกระทบ COVID-19 จุดเปลี่ยนครั้งสำคัญ
ของการศึกษาโลก. ค้นเมื่อ 12 มิถุนายน 2565, จาก <https://www.eef.or.th/article1-02-01-211/>
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ. (2546). การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนโดย
เน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ขอนแก่น: หจก. ขอนแก่นการพิมพ์.
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2547). การสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของประเทศ
ญี่ปุ่น. KKU Journal of Mathematics Education, 1(1), 18-20.
- รุ่งทิพา นามารุง. (2550). วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องของการคูณและการหาร
ของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- อัจฉริยา พงศ์พิชญ. (2551). การวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์จากการแสดงแทนจำนวน
เต็มลบในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตร
มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น
- เอมมิกา จันทะดวง. (2558). การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด. วิทยานิพนธ์ปริญญา

ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

Alfred S. Posamentier & Stephen Krulik. (2009). **Problem solving in mathematics, grades 3–6: powerful strategies to deepen understanding.** The United States of America: Corwin.

Wada, S. (2010). The Procedure of Comparative Discussion. In Isoda, M. & Nakamura, T. (Eds.). In Special Issue (EARCOME 5) Mathematics Education Theories for Lesson Study: Problem Solving Approach and the Curriculum through Extension and Integration. p. 32-33. **Journal of Japan Society of Mathematical Education.**

Isoda, M. & Katagiri, S. (2012). **Mathematical thinking: how to develop it in the classroom.** Singapore: World Scientific.

Inprasitha, M. (2011). One feature of adaptive lesson study in Thailand: Designing learning unit. **Journal of Science and Mathematics Education, 34,** 47-66.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). **The teaching gap Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.** New York: The Free Press.

ภาคผนวก

กระบวนการทำงานกลุ่มของผู้เรียนในชั่วโมงเรียน

เกณฑ์การวัดผล ให้คะแนนระดับคุณภาพของแต่ละพฤติกรรมดังนี้

ดี = 3 สนใจฟังไม่หลับไม่พูดคุยในชั้นมีคำถามที่ดีตอบคำถามถูกต้องทำงานส่งครบตรง

เวลา

ปานกลาง = 2 การแสดงออกอยู่ในเกณฑ์ประมาณ 50%

ปรับปรุง = 1 เข้าชั้นเรียนแต่การแสดงออกน้อยมากส่งงานไม่ครบไม่ตรงเวลา

เกณฑ์คะแนนรวม

คะแนน 0-3 อยู่ในระดับ ปรับปรุง

คะแนน 4-6 อยู่ในระดับ พอใช้

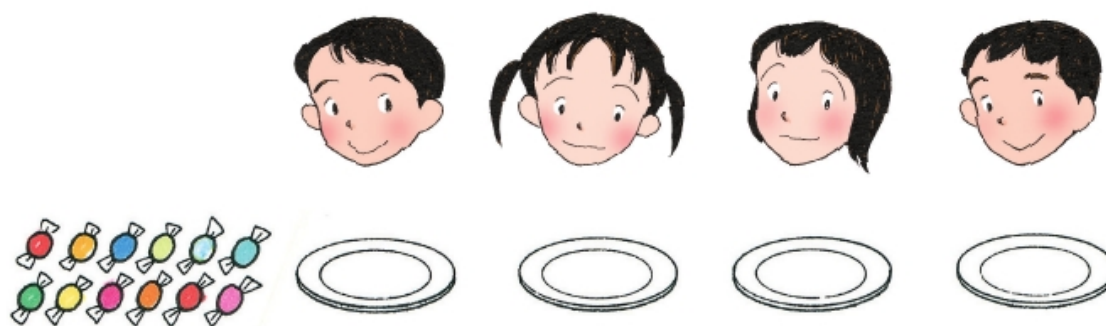
คะแนน 7-9 อยู่ในระดับ ดี

คะแนน 10-12 อยู่ในระดับ ดีมาก

กิจกรรม “แบ่งเท่าๆ กัน”

สถานการณ์ปัญหา : ครูต้องการแบ่งลูกอม 12 เม็ด
ให้เด็ก 4 คน คนละเท่าๆกัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่เม็ด

คำสั่ง : ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งลูกอมให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด

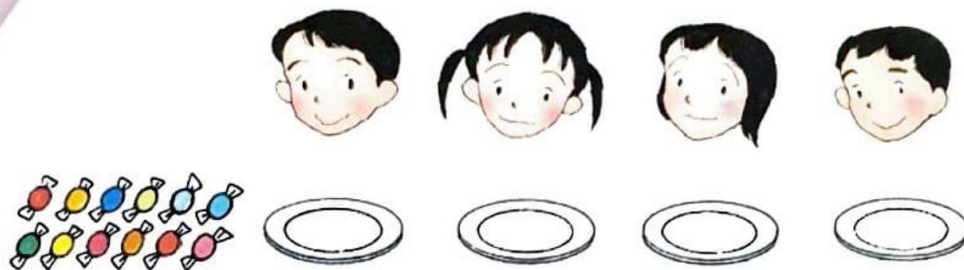


แนวคิดในการแบ่งลูกอม

กิจกรรม "แบ่งเท่า ๆ กัน"

กลุ่ม 3

สถานการณ์ปัญหา: ครูต้องการแบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่เม็ด

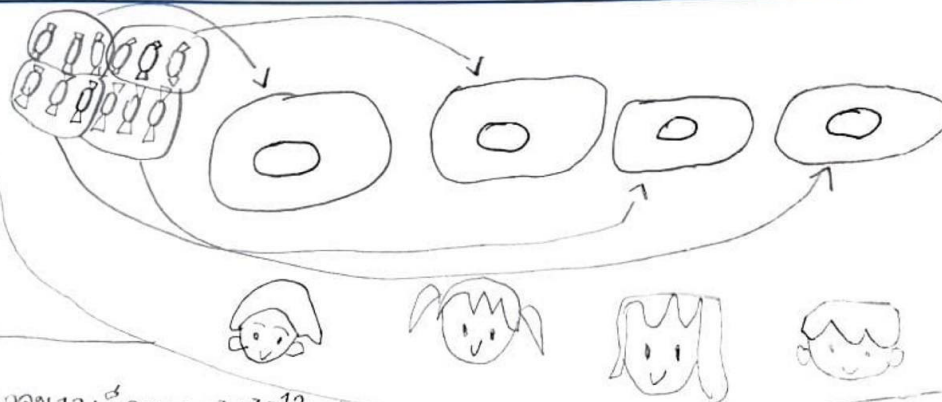


คำสั่ง : ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งลูกอมให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด

ประโยคสัญลักษณ์

$$3 \times 4 = 12$$

แนวคิด



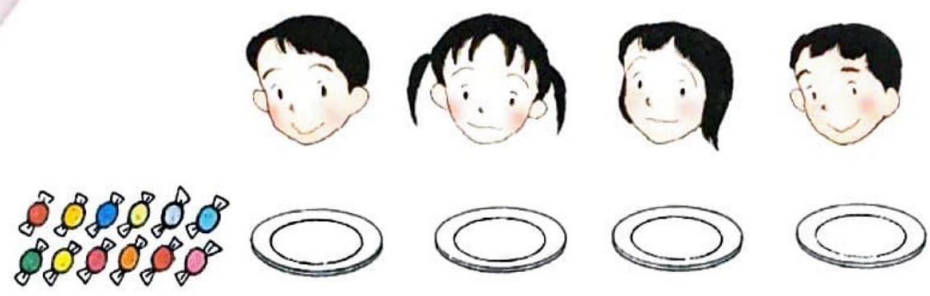
เพราะมีลูกอม 12 เม็ด $3 + 3 + 3 + 3 = 12$



กิจกรรม "แบ่งเท่า ๆ กัน"

กลุ่ม ๑

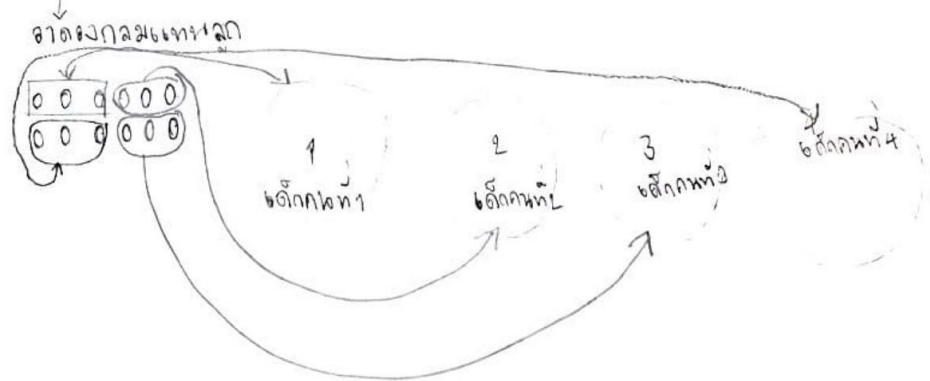
สถานการณ์ปัญหา: ครูต้องการแบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่เม็ด



คำสั่ง : ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งลูกอมให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด

ประโยคสัญลักษณ์ $4 \times 3 = 12$ / $3 \times 4 = 12$

แนวคิด อธิบายการแบ่ง ลูกอม ดีการ แบ่ง ในนี้ให้ตน
ล=3อัน

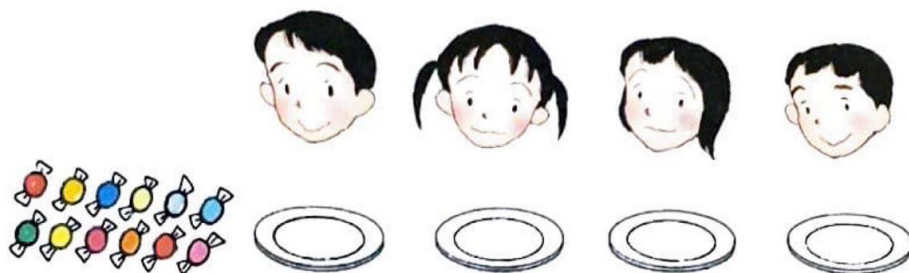


แบ่งจนล=3 แบ่งในนี้ให้เท่ากัน และ ล=ได้เท่าเทียมกัน เอา 3อัน $\times 4 = 12$ / หรือ
เอา $4 \times 3 = 12$ $4 \times 3 = 12$ $3 \times 4 = 12$

กิจกรรม "แบ่งเท่า ๆ กัน"

กลุ่ม ไผ่หน้าง (6)

สถานการณ์ปัญหา: ครูต้องการแบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่เม็ด



คำสั่ง : ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งลูกอมให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด

ประโยคสัญลักษณ์ $3 \times 4 = 12$

1

แนวคิด

203

88



0

0



0

0

0

0

0

0

2

1คน 1คน 1คน 1คน

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3$$

3คนก็ 6 คน 4 ครั้ง
ได้ 12

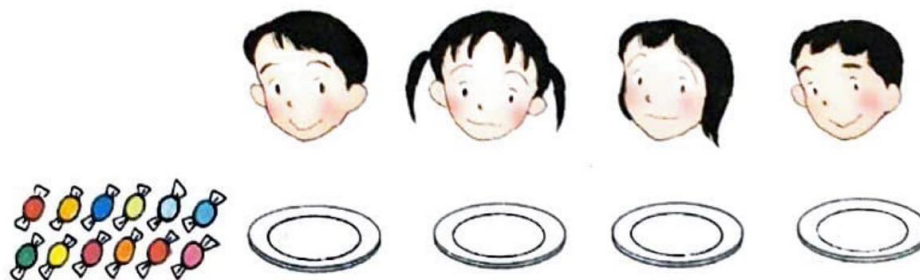
แบ่งลูกอม 3 ก้อน มี 4 ก้อน

เด็กคนละ 6 เม็ด เป็น 6 เม็ด

กิจกรรม "แบ่งเท่า ๆ กัน"

กลุ่ม _____

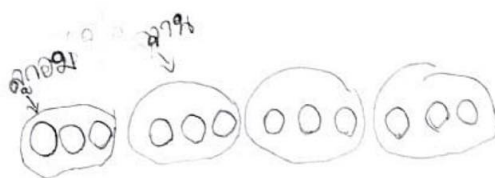
สถานการณ์ปัญหา: ครูต้องการแบ่งลูกอม 12 เม็ด ให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่เม็ด



คำสั่ง : ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งลูกอมให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด

ประโยคสัญลักษณ์ $6 + 6 = 12$

แนวคิด แบ่งลูกอมคนละ 3 เม็ด



กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

กลุ่ม 7 12

สถานการณ์ปัญหาที่ 1: มีคุกกี้ 12 ชิ้น ถ้าแบ่งคุกกี้ให้เด็กแต่ละคน คนละ 4 ชิ้น จะมีเด็กได้รับคุกกี้กี่คน

คำสั่งที่ 1: ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งคุกกี้ให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด



ประโยคสัญลักษณ์ $12 \div 4 = \square$

①

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

②

$$12 \div 4 = \square$$

$$4 \times 3 = 12$$

③

$$12 - 3 - 3 - 3 = 12$$

สถานการณ์ปัญหาที่ 2: มีส้ม 8 ผล ถ้าแบ่งให้เด็กแต่ละคนได้รับส้ม คนละ 2 ผล จะมีเด็กที่ได้รับส้มกี่คน

คำสั่งที่ 2: ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์และหาจำนวนเด็กที่ได้รับส้ม



ประโยคสัญลักษณ์

$$8 \div 2 = \square$$

①

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$

②

$$8 \div 2 = \square$$

$$2 \times 4 = 8$$

③

$$8 - 2 - 2 - 2 - 2 = 8$$

กลุ่ม โผล่ ๒๒๖ (๒๖)

กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

สถานการณ์ปัญหาที่ 1: มีคุกกี้ 12 ชิ้น ถ้าแบ่งคุกกี้ให้เด็กแต่ละคน คนละ 4 ชิ้น จะมีเด็กได้รับคุกกี้กี่คน

คำสั่งที่ 1: ให้นักเรียนช่วยกันคิดวิธีการแบ่งคุกกี้ให้ได้หลากหลายวิธีที่สุด



ประโยคสัญลักษณ์ $12 \div 4 = 3$

$12 = 4 + 4 + 4$

4	๑	๑	๑
8	๑	๑	๑
12	๑	๑	๑

ได้ 3 คน

สถานการณ์ปัญหาที่ 2: มีส้ม 8 ผล ถ้าแบ่งให้เด็กแต่ละคนได้รับส้ม คนละ 2 ผล จะมีเด็กที่ได้รับส้มกี่คน

คำสั่งที่ 2: ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์และหาจำนวนเด็กที่ได้รับส้ม



ประโยคสัญลักษณ์ $8 \div 2 = 4$

$8 = 2 + 2 + 2 + 2$

2	๐	๐
4	๐	๐
6	๐	๐
8	๐	๐

ได้ 4 คน

กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

กลุ่ม 1,000 ไฉ่ฉั่น ♥

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl (เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl (เดซิลิตร) เราจะดื่มจนหมดได้กี่ครั้ง

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ



ปริมาณของนมในแต่ละครั้ง

ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$ 

$$6 \times 5 = 30$$



ดื่มไป 5 ครั้ง

หับขีด ① ② ③ ④
โยงเส้นหาคำตอบ

ใช้การคูณช่วย



ตอบ

ดื่มไป 5 ครั้ง



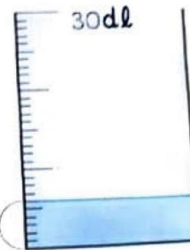
กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

กลุ่ม 3

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl(เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl(เดซิลิตร) เราจะดื่มจนหมดกี่ครั้ง

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ

ปริมาณของนมในแต่ละครั้ง



ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$



ตอบ

กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

กลุ่ม 7

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl(เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl(เดซิลิตร) เราจะดื่มหมดได้กี่ครั้ง

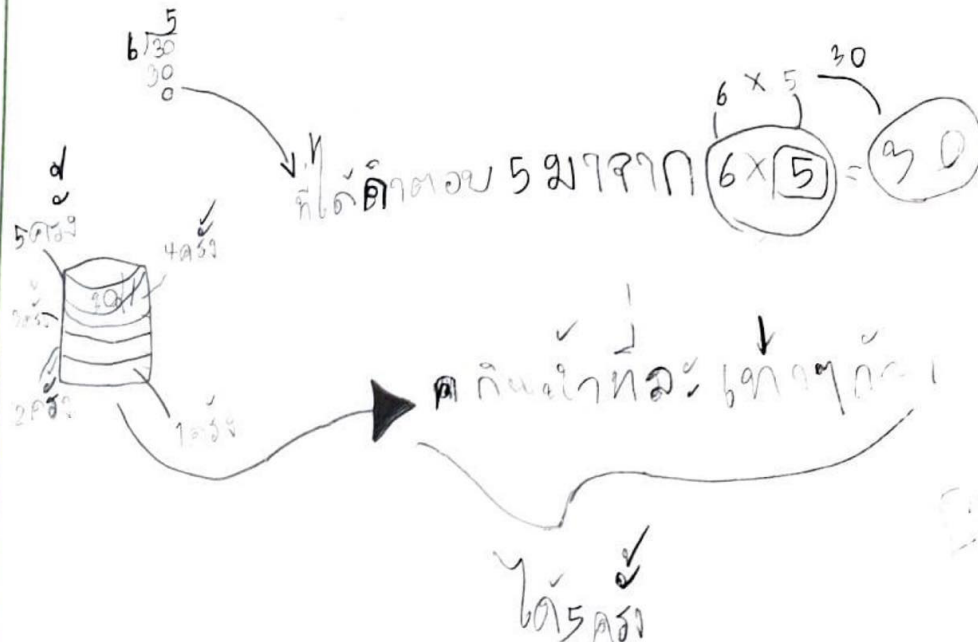
คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ

ปริมาณของนมในแต่ละครั้ง



ประโยคสัญลักษณ์

$$30 \div 6 = \square$$



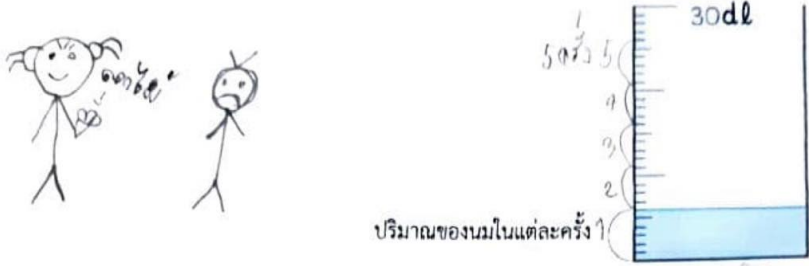
ตอบ

5

กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl(เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl(เดซิลิตร) เราจะดื่มหมดได้กี่ครั้ง

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ



ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$

หั่นๆ 5 ครั้ง นมก็หมด

$6 \times 5 = 30$

ใช้การคูณมาช่วย




ตอบ $= 5$

ภาคผนวก ง

ตัวอย่างโปรแกรมการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl(เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl(เดซิลิตร) เราจะดื่มหมดได้กี่ครั้ง

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ

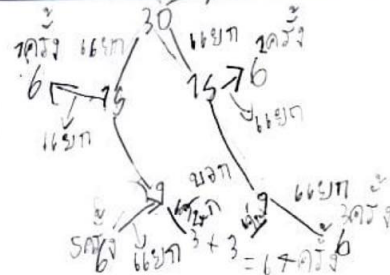
ปริมาณของนมในแต่ละครั้ง



ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$ ปริมาณของนม

อีกวิธี
 $30 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

$6 \times 5 = 30$
 ดื่มได้ 5 ครั้ง

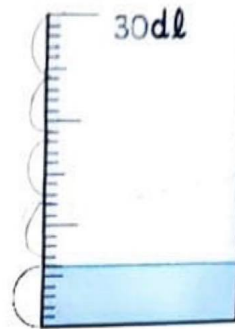


ตอบ

5 ครั้ง



ปริมาณของนมในแต่ละครั้ง



ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$



ขวดนม

$$6 \times 5 = 30$$



ดื่มไป 5 ครั้ง

หัด

นั่งเล่น



ใช้การคูณช่วย

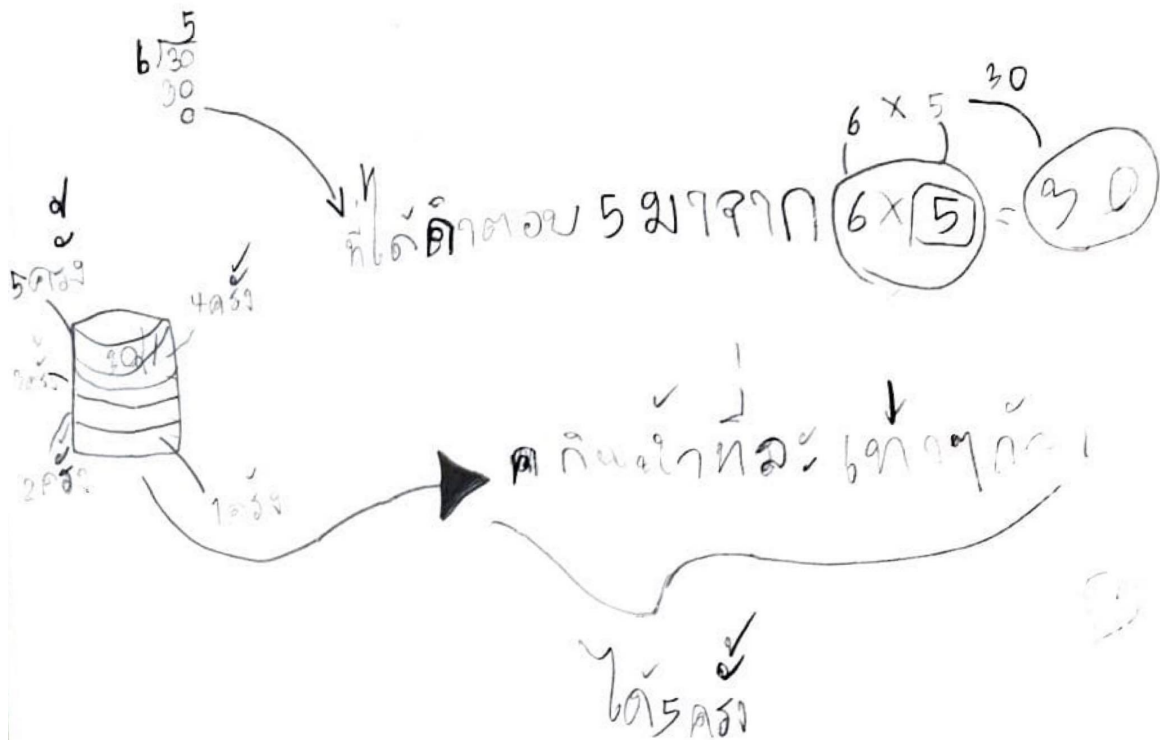


ตอบ ดื่มไป 5 ครั้ง



ประโยคสัญลักษณ์

$$30 \div 6 = \square$$



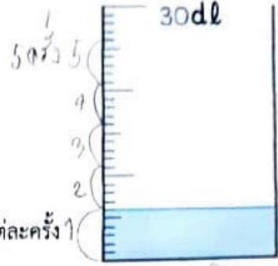
ตอบ

5

กิจกรรม "ปัญหาการหาร"

สถานการณ์ปัญหา : มีนมอยู่ 30 dl(เดซิลิตร) ถ้าเราดื่มไปครั้งละ 6 dl(เดซิลิตร) เราจะดื่มหมดได้กี่ครั้ง

คำสั่ง : ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์พร้อมหาคำตอบ

ประโยคสัญลักษณ์ $30 \div 6 = 5$

หั่นทีละ 5 ครั้ง หั่นจาก

$6 \times 5 = 30$

ใช้การคูณมาช่วย





ตอบ ≈ 5

ประโยคสัญลักษณ์ $6 \div 1 = 6$

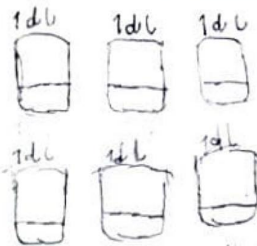
แนวคิด

ถ้า 6 แดง อยู่ 6 dlc เกษี ลี ๖
จะได้อีก ๖ แดง คน ละ 1 dlc เกษี ลี ๖
๖๖๖ จะได้อีก ๖๖๖ ๖๖๖ ๖๖๖

ประโยคสัญลักษณ์ $6 \div 1 = 6$

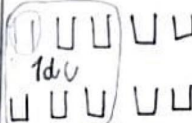
วิธีที่ 1

แนวคิด



มีแก้ว 6 ใบ แก้วใบนี้จะได้ น้ำ
คนละ 1 หน่วย ทำเอา น้ำในแก้ว ใบ
มา รวมกัน จะได้ 6 หน่วย

วิธีที่ 2



แก้วแต่ละใบ ลงใน หางกลม
จะได้ น้ำ คนละ 1 หน่วย

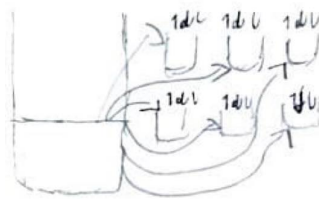
วิธีที่ 3

$$6 \div 1 = 6$$

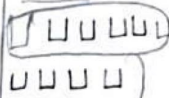
$$6 \times 1 = 6$$

$$1 \times 6 = 6$$

วิธีที่ 3



วิธีที่ 4



นี่คือ แก้ว ที่จะได้ น้ำ 1 หน่วย

ตอบ 6

ประโยคสัญลักษณ์

$$6 \div 1 = 6$$

ตอบ 6

แนวคิด

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2
ใช้วิธีคูณ

$$1 \times 6 = 6$$

การคูณ

$$6 \div 1 = 6$$

วิธีคูณ

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

ตอบ

6

ประโยคสัญลักษณ์ $6 \div 1 = \square$

แนวคิด

① $6 \div 1$

②

$1 \times 1 = 1$
 $1 \times 2 = 2$
 $1 \times 3 = 3$
 $1 \times 4 = 4$
 $1 \times 5 = 5$
 $1 \times 6 = 6$

③

6
6
6
0

ตอบ 6

มีอยู่ 10 66 แล้วมี 1 66 1 66 1 66 1 66 1 66 1 66

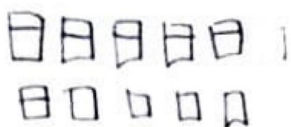
1 2 3 4 5 6

1 1 1 1 1 1

ตอบ 6

ประโยคสัญลักษณ์ $6 \div 1 = 1$

แนวคิด

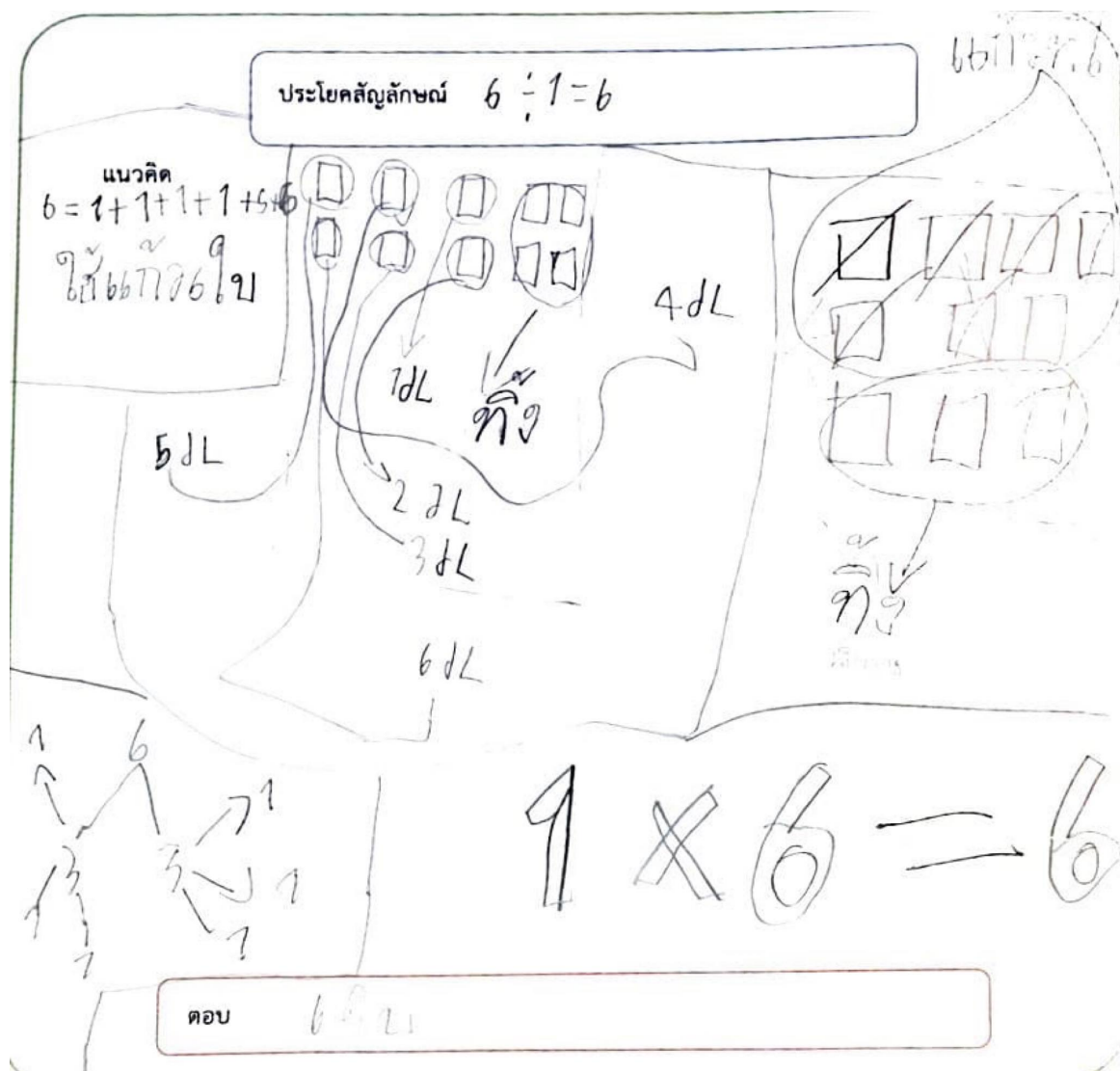


$$\begin{array}{l} 6 \times 1 = 1 \\ (6 \div 1 = 1) \end{array}$$

ข้อนี้ทำ มีน้ำแดง 6 ๕L (๕ ลิตร)

ลงไปในแก้วแต่ละใบ จะต้องต้องใช้แก้ว 6 ใบ

เพราะมีแก้วทั้งหมด ๖ ใบ แล้วเอาใส่แก้วไป ๖ ใบ
แล้ว $(6 \times 1 = 1)$ $(6 \div 1 = 1)$ เพราะฉะนั้น ตอบ 1



แนวคิด

ประโยคสัญลักษณ์ $6 \div 6 = \square$

ตอบ 6

$6 \div 1 = \square$

66 หน่วย

เท่ากับ 6

ตอบ 6